

## Entscheidung auf der Basis der Risikonutzenfunktion

*Bernoullis klassischer Ansatz*

### 1. Datensituation

Die einer Entscheidung unter Unsicherheit zugrunde zu legende Risikonutzenfunktion möge lauten:

$$N(EW) = -900 + 100 EW - EW^2 \qquad 10 \leq EW \leq 50$$

#### Symbole

N      Risikonutzen

EW      Endwert

Die Entscheidung erfolgt auf Grundlage der Bernoulli-Nutzentheorie. Dem Entscheidungsträger liegen folgende Daten vor:

	U <sub>j</sub> w <sub>j</sub>	U <sub>1</sub> w <sub>1</sub> = 0,2	U <sub>2</sub> w <sub>2</sub> = 0,8
A <sub>i</sub>	EW <sub>ij</sub>		
A <sub>1</sub>		20	30
A <sub>2</sub>		15	35
A <sub>3</sub>		30	30
A <sub>4</sub>		50	10

Abb. 1: Entscheidungsmatrix mit Endwerten

#### Symbole

U<sub>j</sub>      Umweltsituation

w<sub>j</sub>      subjektive Wahrscheinlichkeit für den Eintritt der Umweltsituation j

A<sub>i</sub>      Alternative i

### 2. Aufgaben

- (1) Bestimmen Sie diejenige Alternative, die zum maximalen Erwartungswert des Risikonutzens führt! Achten Sie auf Dominanz von Alternativen!
- (2) Angenommen, eine weitere Alternative (A<sub>5</sub>) führe bei Eintritt der Umweltsituation 1 zu einem Endwert von 10 GE; wie hoch müsste der Endwert bei Eintritt der Umweltsituation 2 sein, damit Indifferenz gegenüber der rangersten Alternative besteht?
- (3) Erarbeiten Sie eine Entscheidungsempfehlung auf der Basis einer normierten Risikonutzenfunktion! Zur Normierung soll der höchste Risikonutzen einer Entscheidungsalternative gleich 1 sein.

### 3. Lösung

#### (1) Ermittlung der Risikonutzen

$A_1$  wird von  $A_3$  dominiert, da für  $A_3$  in jeder Umweltsituation ein mindestens gleich hoher Zielwert erwartet wird. Die in der Entscheidungsmatrix darzustellenden relevanten (nicht dominierten) Alternativen sind somit  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$ .

$A_i$	$U_j$ $w_j$	$U_1$ $w_1 = 0,2$	$U_2$ $w_2 = 0,8$	$ERN_i$	$N_{ij}$	$Rang$
	$N_{ij}$					
$A_2$		$N_{21} = -900 + 100 \cdot 15 - 15^2 = 375$	1.375	$ERN_1 = 0,2 \cdot 375 + 0,8 \cdot 1375 = 1175$		2
$A_3$		1.200	1.200	1.200		1
$A_4$		1.600	0	320		3

Abb. 2: Entscheidungsmatrix mit Risikonutzenwerten und den Erwartungswerten des Risikonutzens

Die Alternative  $A_3$  führt somit zum maximalen Erwartungswert des Risikonutzens (ERN).

#### (2) Indifferenz

Zur Ermittlung des Endwertes der Alternative 5 (dies ist die „weitere Alternative“) bei Eintritt der Umweltsituation 2 ist die folgende Gleichgewichtsbedingung zu formulieren:

$$w_1 \cdot N(EW_{51}) + w_2 \cdot N(EW_{52}) = ERN_3$$

Für die vorliegende Datensituation gilt:

$$0,2 \cdot N(10) + 0,8 \cdot N(EW_{52}) = 1200$$

Setzt man für  $N(10)$  den Wert 0 ein (aus der Aufgabenstellung) und löst diese Gleichung nach  $N(EW_{52})$  auf, so ergibt sich:

$$N(EW_{52}) = \frac{1200}{0,8} = 1500$$

Für die Höhe von  $EW_{52}$  muss somit gelten:

$$N(EW_{52}) = -900 + 100EW_{52} - EW_{52}^2 = 1500$$

Eine Auflösung nach  $EW_{52}$  führt zu den beiden folgenden Lösungen:

1. Lösung:  $EW_{52} = 40$

2. Lösung:  $EW_{52} = 60$

Die zweite Lösung ist nicht relevant, da sie das Maximum der Risikonutzenfunktion und somit das Ende des Zulässigkeitsintervalls überschreitet.<sup>1</sup>

$EW_{52}$  muss im Fall von Indifferenz mit der rangersten Alternative ein Niveau von 40 aufweisen.

### (3) Normierung

Zur Normierung der Risikonutzenfunktion ist die ursprüngliche Funktion durch  $N(EW_{\max})$  zu dividieren.

$$N^{\text{norm}}(EW) = \frac{N(EW)}{N(EW_{\max})}$$

Analog ist mit dem Erwartungswert des Risikonutzens zu verfahren:

$$ERN_i^{\text{norm}} = \frac{ERN_i}{N(EW_{\max})}$$

Unter Verwendung der Daten ergibt sich:

$$N^{\text{norm}}(EW) = \frac{-900 + 100 EW - EW^2}{1600}$$

$$N^{\text{norm}}(EW) = -\frac{9}{16} + \frac{1}{16} EW - \frac{1}{1600} EW^2$$

Unter Verwendung der normierten Risikonutzenfunktionen bzw. der Erwartungswerte des Risikonutzens ergibt sich natürlich die gleiche Rangfolge, die auch bei der Verwendung der Ausgangswerte ermittelt worden ist.<sup>2</sup>

A <sub>i</sub>	U <sub>5</sub>	U <sub>1</sub> w <sub>1</sub> = 0,2	U <sub>2</sub> w <sub>2</sub> = 0,8	ERN <sub>i</sub> <sup>norm</sup>	Rang
	N <sup>nom</sup>				
A <sub>2</sub>		0,234	0,859	0,734	2
A <sub>3</sub>		0,75	0,75	0,75	1
A <sub>4</sub>		1	0	0,2	3

Abb. 3: Entscheidungsmatrix zur Ermittlung normierter Erwartungswerte des Risikonutzens

<sup>1</sup> Das Maximum der Risikonutzenfunktion liegt bei  $EW=50$ .

<sup>2</sup> Selbstverständlich hätten die normierten  $ERN_i$ 's auch unmittelbar ermittelt werden können.