

Indice

Parte I Teoria degli insiemi e Logica matematica

1. Qual è, o quale dovrebbe essere, il ruolo della teoria degli insiemi nell'insegnamento della matematica?	3
1.1 La teoria degli insiemi e la "matematica moderna"	3
1.2 Applicazioni della teoria degli insiemi. Confronto di definizioni	5
1.3 La teoria degli insiemi nella didattica	7
1.4 Confronto fra insiemi infiniti	10
2. Che cosa significa che due insiemi sono uguali? La parola "uguale" e il simbolo "=" hanno un unico significato in matematica?	13
3. Che cosa significa che un insieme è infinito, oppure che è finito?	17
3.1 La definizione di Dedekind	17
3.2 Finito e infinito. Limitato e illimitato	19
3.3 Citazioni sull'infinito	20
4. La teoria degli insiemi è meno "sicura" delle altre teorie matematiche, come l'algebra o la geometria? E perché non è lecito parlare dell'insieme di tutti gli insiemi?	21
4.1 I paradossi di Cantor e di Russell	21
4.2 L'insieme di tutti gli insiemi e la teoria assiomatica	22
4.3 Quali esigenze portano alle teorie assiomatiche?	24
5. Che cosa è, in generale, un paradosso? Quali sono i paradossi più significativi? E qual è il loro ruolo in matematica?	25
5.1 Una prima classificazione. Ragionamenti che contengono errori	25
5.2 Situazioni paradossali	27
5.3 Paradossi semantici e paradossi linguistici	28
5.4 Due paradossi di tipo diverso	30
5.5 Qualche commento su alcuni dei paradossi visti	32

6. In che cosa si differenzia il linguaggio della logica dal linguaggio che usiamo tutti i giorni? Ci sono legami fra i simboli logici e i simboli della teoria degli insiemi?	35
6.1 Il linguaggio naturale e le sue ambiguità	35
6.2 Ambiguità ed errori logici nella vita corrente	36
6.3 La logica e i linguaggi logici	39
6.4 La logica delle proposizioni	40
6.5 La logica dei predicati	41
6.6 Qualche proprietà di connettivi e quantificatori	42
6.7 I connettivi e la teoria degli insiemi	43
6.8 La formalizzazione	44
7. Oltre alle tavole di verità, ci sono altri esercizi di logica che vale la pena affrontare nelle Scuole secondarie?	47
7.1 La logica come tema trasversale	47
7.2 L'isola di Smullyan	47
7.3 Altri esercizi tratti da gare o prove di matematica	50
7.4 Esercizi che richiedono conoscenze specifiche. L'esame di Stato	53
8. Che cosa è un teorema? Qual è la struttura logica di un teorema? Ci sono diversi tipi di dimostrazione? E c'è differenza fra esempio e controesempio?	55
8.1 Un enunciato che si dimostra	55
8.2 La struttura di un teorema	55
8.3 Implicazione contronominale. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti	57
8.4 Teoremi inversi e controesempi	58
8.5 La dimostrazione di un teorema	61
9. Che cosa significa che un teorema è dimostrato per assurdo?	65
9.1 Il ragionamento per assurdo	65
9.2 Esempi di dimostrazioni per assurdo	66
9.3 La dimostrazione per assurdo e l'implicazione contronominale	68
9.4 Applicazioni ridondanti del ragionamento per assurdo	69
10. Come va impostata una teoria matematica? La logica matematica offre una fondazione definitiva per le varie teorie matematiche?	71
10.1 Assiomi ed enti primitivi	71
10.2 Teorie assiomatiche deduttive e loro proprietà	74
10.3 Esempi di teorie assiomatiche	75

11. Si può dare una definizione di definizione? Qual è il ruolo delle definizioni? È vero che i teoremi si dimostrano a partire dalle definizioni?	77
11.1 Le definizioni sul vocabolario, in filosofia, in matematica	77
11.2 Definizioni, teoremi, condizioni necessarie e sufficienti	79
11.3 Qualche indicazione didattica	81
12. In che misura i teoremi di Gödel minano le fondamenta dell'intero edificio matematico?	87
12.1 Una teoria assiomatica per l'aritmetica dei numeri naturali	87
12.2 Enunciati veri ed enunciati dimostrabili - il primo teorema di Gödel	88
12.3 Il secondo teorema di Gödel e il programma di Hilbert	91
13. Esistono ancora problemi aperti in matematica? Ci sono legami con gli enunciati indecidibili di cui parlano i teoremi di Gödel? E con i problemi insolubili come la quadratura del cerchio?	95
13.1 Problemi aperti ed enunciati indecidibili	95
13.2 Esempi di problemi aperti	96
13.3 Problemi insolubili e risultati limitativi	99

Parte II Analisi matematica

14. È più opportuno iniziare lo studio dell'analisi matematica a partire dalle successioni o dalle funzioni?	103
14.1 Alcune successioni famose	104
14.2 L'evoluzione storica della nozione di funzione	111
15. È proprio necessaria la nozione di limite? E perché se ne dà una definizione così lontana dall'idea intuitiva?	117
15.1 Origini dell'idea. Indivisibili, infinitesimi, evanescenti...	119
15.2 Breve analisi della definizione di limite	123
15.3 Generalizzazione del concetto di limite e Topologia	123
15.4 L'approccio dell'Analisi non standard	124
16. Come è possibile che molti fondamentali risultati in Analisi precedano una definizione rigorosa di limite, di derivata o di integrale?	127
16.1 La genesi di una teoria matematica	127

16.2 Implicazioni didattiche	129
16.3 Il <i>Calculus</i>	129
17. Quali ruoli giocano ai fini dello studio di una funzione le nozioni di continuità e di derivabilità?	131
17.1 La definizione di continuità di Cauchy e il concetto intuitivo	131
17.2 Discontinuità, singolarità	134
17.3 Conseguenze della continuità	135
18. Perché il concetto di derivata è così importante in analisi?	139
18.1 Derivata e derivabilità	139
18.2 Continuità e derivabilità	143
18.3 Conseguenze della derivabilità	145
19. Esistono casi significativi in cui la ricerca di massimi e minimi può essere effettuata senza ricorrere all'Analisi Matematica?	151
19.1 Massimi e minimi senza Analisi Matematica	151
20. È meglio introdurre prima l'integrale definito o quello indefinito? E perché l'operazione di integrazione è tanto più difficile di quella di derivazione?	159
20.1 Integrale definito e integrale indefinito	159
20.2 Derivazione e integrazione	171
21. Cosa significa approssimare una funzione? E quali sono i possibili criteri per la scelta delle funzioni approssimanti?	177
21.1 I polinomi interpolatori di Lagrange	177
21.2 Le funzioni spline	179
21.3 I polinomi e le serie di Taylor	181
21.4 Le serie di Fourier	187
21.5 Criteri di approssimazione, a seconda del problema che si vuole affrontare	192
22. Quali sono le funzioni da considerarsi fondamentali in Analisi Matematica? E che dire delle funzioni di due o più variabili?	195
22.1 Le funzioni polinomiali	195
22.2 Le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche	198
22.3 Le funzioni goniometriche	201
22.4 Altre funzioni importanti	203
22.5 Funzioni a più variabili	203

23. Come fare, se non ci sono formule esatte per il calcolo?	205
23.1 Valutazione di una funzione in un punto	205
23.2 Zeri di una funzione	207
23.3 Integrale di una funzione	211
23.4 Soluzioni di equazioni differenziali ordinarie	216

Parte III Probabilità e Statistica

24. Perché in ambito probabilistico anche semplici problemi celano spesso difficoltà e sconcerto?	223
25. Esistono diverse impostazioni della probabilità. Qual è quella preferibile dal punto di vista teorico? E dal punto di vista didattico?	227
25.1 Terminologia di base	227
25.2 Tre diverse impostazioni della probabilità	229
25.3 L'assiomatizzazione della probabilità	233
25.4 Prime conseguenze degli assiomi	236
26. Perché in ambito probabilistico, quando si parla di eventi indipendenti, si avverte l'esigenza di specificare che si tratta di indipendenza "stocastica"?	237
26.1 Indipendenza tra coppie di eventi	237
26.2 Probabilità condizionata	240
26.3 Indipendenza tra tre o più eventi	243
26.4 Qualche ulteriore esempio	244
27. Perché, contrariamente ad altri settori della matematica, nel calcolo delle probabilità si privilegiano situazioni ludiche?	247
27.1 Alcuni esempi "classici"	247
27.2 Il processo di Bernoulli	250
28. In quali contesti, oltre a quello ludico, il calcolo delle probabilità svolge ruoli importanti?	255
28.1 Il modello dell'urna	255
28.2 Il teorema di Bayes	257
28.3 Il modello di Hardy-Weinberg	259

29. Qual è il significato matematico della frase spesso citata “il caso non ha memoria”?	261
29.1 Il gioco del lotto	261
29.2 Variabili aleatorie e speranza matematica	265
30. Probabilità nel continuo: cosa cambia rispetto alla probabilità nel discreto?	271
30.1 Alcuni celebri paradossi	271
30.2 Il teorema del limite centrale	273
31. Quali rapporti intercorrono tra la probabilità e la statistica matematica?	275
31.1 Statistica descrittiva e statistica inferenziale	275
31.2 Problemi di stima e verifica di ipotesi	277
32. Perché molti pensano che i risultati dei calcoli probabilistici o statistici siano inaffidabili o menzogneri?	283
Bibliografia	289
Indice analitico	293