

## Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Bearbeitet von  
Dietrich Braess

1. Auflage 2013. Taschenbuch. xvi, 369 S. Paperback

ISBN 978 3 642 34796 2

Format (B x L): 16,8 x 24 cm

Gewicht: 648 g

[Weitere Fachgebiete > Mathematik > Numerik und Wissenschaftliches Rechnen](#)

schnell und portofrei erhältlich bei



Die Online-Fachbuchhandlung beck-shop.de ist spezialisiert auf Fachbücher, insbesondere Recht, Steuern und Wirtschaft. Im Sortiment finden Sie alle Medien (Bücher, Zeitschriften, CDs, eBooks, etc.) aller Verlage. Ergänzt wird das Programm durch Services wie Neuerscheinungsdienst oder Zusammenstellungen von Büchern zu Sonderpreisen. Der Shop führt mehr als 8 Millionen Produkte.

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur vierten Auflage	x
Vorwort zur ersten Auflage	xi
Bezeichnungen	xiii
<i>Kapitel I</i>	
<i>Einführung</i>	1
§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 7 — Sachgemäß gestellte Probleme 8 —	
Aufgaben 10	
§ 2. Maximumprinzip	11
Beispiele 12 — Folgerungen 13 — Aufgaben 14	
§ 3. Differenzenverfahren	15
Diskretisierung 15 — Diskretes Maximumprinzip 18	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	21
Konsistenz 21 — Lokaler und globaler Fehler 21 — Grenzen der Konver-	
genztheorie 24 — Aufgaben 25	
<i>Kapitel II</i>	
<i>Konforme Finite Elemente</i>	26
§ 1. Sobolev-Räume	27
Einführung der Sobolev-Räume 27 — Die Friedrichssche Ungleichung 29	
— Singularitäten von $H^1$ -Funktionen 30 — Kompakte Einbettungen 31 —	
Aufgaben 31	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben	33
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen	
35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 40 —	
Aufgaben 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	42
Elliptizität in $H^1$ 42 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingun-	
gen 43 — Neumannsche Randbedingungen 44 — Gemischte Randbedin-	
gungen 45 — Beweis des Spursatzes 45 — Praktische Konsequenzen aus	
dem Spursatz 48 — Aufgaben 49	
§ 4. Ritz–Galerkin–Verfahren und einfache Finite Elemente	51
Modellproblem 54 — Aufgaben 56	

§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	57
Forderungen an die Triangulierung 58 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 59 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 61 — Bemerkung zu $C^1$ -Elementen 62 — Bilineare Elemente 64 — Quadratische Viereckelemente 66 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 70 — Aufgaben 70	
§ 6. Approximationssätze	72
Der Fragenkreis um das Bramble–Hilbert–Lemma 73 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 74 — Bilineare Viereckelemente 78 — Inverse Abschätzungen 79 — Cléments Operator 80 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 82 — Aufgaben 83	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	85
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 85 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 86 — $L_2$ -Abschätzungen 87 — Eine einfache $L_\infty$ -Abschätzung 89 — Der $L_2$ -Projektor 90 — Aufgaben 91	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	92
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 92 — Innere Kondensation 94 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 95 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 95 — Teilweise Netzverfeinerungen 95 — Zur Lösung des Neumann-Problems 97 — Aufgaben 97	

### *Kapitel III*

#### *Nichtkonforme und andere Methoden*

§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	99
Die Lemmas von Strang 100 — Dualitätstechnik 102 — Das Crouzeix–Raviart–Element 103 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 106 — Modifikationen beim Dualitätsargument 108 — Aufgaben 110	100
§ 2. Isoparametrische Elemente	111
Isoparametrische Dreieckelemente 111 — Isoparametrische Viereckelemente 113 — Aufgaben 115	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	116
Negative Normen 116 — Adjungierte Operatoren 118 — Ein abstrakter Existenzsatz 118 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 120 — Beweis von Satz 3.4 121 — Aufgaben 122	
§ 4. Sattelpunktprobleme	123
Sattelpunkte und Minima 123 — Die inf-sup-Bedingung 124 — Gemischte Finite-Element-Methoden 128 — Fortin-Interpolation 130 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 131 — Typische Anwendungen 135 — Aufgaben 136	

§ 5. Gemischte Methoden für die Poisson-Gleichung	138
Die Poisson-Gleichung als gemischtes Problem 138 — Das Zwei-Energien-Prinzip — Das Raviart–Thomas–Element 142 — Interpolation mit Raviart–Thomas–Elementen 143 — Implementierung und nachträgliche Verbesserung 146 — Gitterabhängige Normen für das Raviart–Thomas–Element 147 — Der Aufweichungs-Effekt gemischter Methoden 148 — Aufgaben 150	
§ 6. Die Stokessche Gleichung	152
Variationsformulierung 153 — Die inf-sup-Bedingung 154 — Fast inkompressible Strömungen 156 — Aufgaben 157	
§ 7. Finite Elemente für das Stokes-Problem	158
Ein instabiles Element 158 — Das Taylor–Hood–Element 163 — Das MINI-Element 164 — Das divergenzfreie nichtkonforme $P_1$ -Element 166 — Aufgaben 167	
§ 8. A posteriori Abschätzungen	168
Residuale Schätzer 170 — Untere Abschätzungen 172 — Bemerkungen zu anderen Schätzern 175 — Lokale Gitterverfeinerungen und Konvergenz 175	
§ 9. A Posteriori Schätzer über das Zwei-Energien-Prinzip	177
Aufgaben 183	

#### *Kapitel IV*

#### *Die Methode der konjugierten Gradienten*

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	185
Stationäre lineare Prozesse 186 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren 188 — Das Modellproblem 191 — Overrelaxation 191 — Aufgaben 194	
§ 2. Gradientenverfahren	195
Das allgemeine Gradientenverfahren 195 — Gradientenverfahren und quadratische Funktionen 196 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit großer Kondition 198 — Aufgaben 199	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	200
Der Algorithmus 202 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Verfahren 204 — Verfahren der konjugierten Residuen 206 — Indefinite und unsymmetrische Matrizen 207 — Aufgaben 208	
§ 4. Vorkonditionierung	209
Vorkonditionierung durch SSOR 212 — Vorkonditionierung durch ILU 213 — Bemerkungen zur Parallelisierung 215 — Nichtlineare Probleme 216 — Aufgaben 217	
§ 5. Sattelpunktprobleme	220
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 220 — Eine Alternative 222 — Aufgaben 223	

<i>Kapitel V</i>	
<i>Mehrgitterverfahren</i>	224
§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben	225
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 225 — Die Mehrgitter-Idee 226 — Der Algorithmus 227 — Der Übergang zwischen den Gittern 230 — Aufgaben 234	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren	235
Diskrete Normen 236 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 238 — Approximationseigenschaft 240 — Konvergenzbeweis für das Zweigitterverfahren 241 — Andere Konzepte 242 — Aufgaben 244	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen	245
Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 245 — Die Verschärfung für die Energienorm 246 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 248 — Aufgaben 251	
§ 4. Berechnung von Startwerten	252
Bestimmung von Startwerten 253 — Komplexität 254 — Mehrgitterverfahren mit wenigen Ebenen 255 — Das cascatische Mehrgitterverfahren 256 — Aufgaben 257	
§ 5. Analyse von Mehrgitterverfahren	258
Das Schwarzsche alternierende Verfahren 259 — Algorithmen mit Teilraumzerlegungen aus algebraischer Sicht 261 — Hypothesen 262 — Direkte Folgerungen 263 — Konvergenz der multiplikativen Methode 264 — Nachweis der Hypothese A.1 266 — Lokale Gitterverfeinerungen 267 — Aufgaben 268	
§ 6. Nichtlineare Probleme	269
Mehrgitter-Newton-Verfahren 270 — Das nichtlineare Mehrgitterverfahren 271 — Startwerte 273 — Aufgaben 274	
<i>Kapitel VI</i>	
<i>Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper</i>	275
§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie	276
Kinematik 276 — Gleichgewichtsbedingungen 278 — Die Piola-Transformation 280 — Materialgesetze 281 — Lineare Materialgesetze 285	
§ 2. Hyperelastische Materialien	287
Aufgaben 289	
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie	290
Das Variationsproblem 290 — Die reine Verschiebungsmethode 294 — Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 297 — Die gemischte Methode nach Hu–Washizu 299 — Aufgaben 301	

§ 4. Locking	303
Probleme mit kleinem Parameter 303 — Locking beim Timoschenko-Balken	
306 — Fast inkompressibles Material 309 — Aufgabe 313	
§ 5. Scheiben	314
Ebener Spannungszustand 314 — Ebener Verzerrungszustand 315 — Schei-	
benelemente 315 — Das PEERS-Element 316 — Aufgaben 321	
§ 6. Balken und Platten: Dimensionsreduktion	322
Die Hypothesen 322 — Modifikation der Hypothese H2 zu ihrer Recht-	
fertigung 325 — Reduktion des (1, 1, 2)-Modells 328 — Anwendung des	
Zwei-Energien-Prinzips auf Platten 329 — Bemerkungen zu Balken 332	
§ 7. Finite Elemente für die Kirchhoff-Platte	333
Gemischte Methoden für die Kirchhoff-Platte 332 — DKT-Elemente 335	
— Aufgaben 340	
§ 8. Die Reissner–Mindlin–Platte	341
Die Helmholtz-Zerlegung 342 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-	
Zerlegung 344 — MITC-Elemente 345 — Der Ansatz ohne Helmholtz-	
Zerlegung 349 — Aufgaben 352	
Literatur	353
Sachverzeichnis	365