

---

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Équations de la mécanique des fluides</b>	1
1	Coordonnées lagrangiennes et eulériennes	2
2	Le théorème du transport	4
3	Les équations de bilan	7
3.1	Premières équations de conservation	7
3.2	Théorème de Cauchy - Tenseur des contraintes	10
3.3	Retour aux équations de conservation - Symétrie du tenseur des contraintes	15
4	Lois de constitution : Fluides newtoniens et lois thermodynamiques	18
4.1	Fluide au repos	18
4.2	Hypothèse de Newton. Tenseur des taux de déformations	19
4.3	Conséquences du second principe de la thermodynamique	24
4.4	Equation pour l'énergie interne spécifique	26
4.5	Formulation en entropie et en température	27
5	Récapitulatif des équations	28
6	Modèles incompressibles	30
6.1	Vocabulaire	30
6.2	Vue d'ensemble des modèles étudiés	31
6.3	Modèles adimensionnés	32
7	Quelques solutions stationnaires exactes des équations de Navier-Stokes	35
7.1	Cadre général	36
7.2	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite	36
7.3	Ecoulement de cisaillement plan	38
7.4	Ecoulement de Couette entre deux cylindres	39
8	Commentaires bibliographiques	42
<b>II</b>	<b>Rappels d'analyse</b>	43
1	Résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle	44
1.1	Espaces de Banach	44

VIII Table des matières

1.2	Convergence faible, convergence faible-* . . . . .	46
1.3	Espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	49
2	Résultats de compacité de base . . . . .	57
2.1	Ensembles compacts . . . . .	57
2.2	Applications compactes . . . . .	59
2.3	Théorèmes de point fixe de Schauder . . . . .	62
3	Espaces de Sobolev . . . . .	63
3.1	Définitions . . . . .	63
3.2	Dualité . . . . .	64
3.3	Les espaces $H^{-m}(\Omega)$ . . . . .	66
3.4	Injections de Sobolev . . . . .	69
3.5	Théorème de produit . . . . .	75
3.6	Inégalités de Poincaré . . . . .	78
4	Fonctions d'une variable réelle . . . . .	80
4.1	Dérivation et primitives . . . . .	80
4.2	Inégalités différentielles et lemmes de Gronwall . . . . .	83
5	Espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach . . . . .	87
5.1	Définition et premières propriétés . . . . .	87
5.2	Exemples fondamentaux . . . . .	89
5.3	Dérivée faible en temps . . . . .	90
5.4	Théorèmes de continuité . . . . .	91
5.5	Théorèmes de compacité . . . . .	97
5.6	Transformation de Fourier à valeurs dans un Banach . . . . .	101
<b>III</b>	<b>Opérateurs gradient et divergence. Problème de Stokes . . . . .</b>	<b>107</b>
1	Les champs de gradient . . . . .	108
1.1	Cas de l'espace entier . . . . .	110
1.2	Cas des demi-espaces . . . . .	111
1.3	Cas des ouverts bornés lipschitziens . . . . .	118
1.4	Inégalités de Poincaré dans $L^2(\Omega)$ et espace $L_0^2(\Omega)$ . . . . .	120
1.5	Caractérisation des champs de gradient . . . . .	123
2	Opérateur divergence . . . . .	129
2.1	Champs de vecteurs à divergence $L^2$ . . . . .	129
2.2	Champs de vecteurs à divergence nulle - Décomposition de Leray . . . . .	133
3	Problème de Stokes. Opérateur de Stokes . . . . .	136
3.1	Rappels de théorie des opérateurs non-bornés . . . . .	136
3.2	Application à l'opérateur de Stokes . . . . .	143
3.3	Régularité elliptique de l'opérateur de Stokes et applications . . . . .	148
4	Régularité du problème de Stokes . . . . .	153
4.1	Problème de Stokes non-homogène . . . . .	153
4.2	Premier cran de régularité . . . . .	155
4.3	Régularité locale . . . . .	155

4.4	Régularité au bord . . . . .	162
4.5	Cas général du théorème de régularité . . . . .	174
4.6	Théorie $L^p$ du problème de Stokes . . . . .	175
5	Problème de Stokes avec conditions aux limites en contrainte . . . . .	177
5.1	Rappels sur l'opérateur de Laplace . . . . .	178
5.2	Existence et unicité pour le problème de Stokes/Neumann	179
5.3	Propriétés de régularité . . . . .	183
5.4	Conditions aux limites en contrainte . . . . .	191
<b>IV</b>	<b>Équations de Navier-Stokes pour un fluide homogène . . . . .</b>	<b>199</b>
1	Le théorème de J. Leray . . . . .	200
1.1	Terme d'inertie . . . . .	200
1.2	Formulations faibles des équations de Navier-Stokes . . . . .	202
1.3	Enoncé du théorème de Leray . . . . .	206
1.4	Problème approché . . . . .	207
1.5	Estimations d'énergie . . . . .	209
1.6	Passage à la limite . . . . .	211
1.7	Problème d'unicité . . . . .	214
1.8	Globalité des solutions faibles . . . . .	216
1.9	Evolution de l'énergie . . . . .	217
1.10	Existence et régularité de la pression . . . . .	222
2	Solutions fortes . . . . .	223
2.1	Nouvelles estimations . . . . .	225
2.2	Le cas de la dimension 2 . . . . .	226
2.3	Le cas de la dimension 3 . . . . .	229
2.4	Régularité à tous ordres pour les équations de Navier-Stokes . . . . .	235
2.5	Régularisation en temps . . . . .	241
<b>V</b>	<b>Conditions aux limites en sortie d'un écoulement . . . . .</b>	<b>245</b>
1	Mise en place du modèle . . . . .	246
2	Le théorème d'existence et d'unicité . . . . .	249
2.1	Théorème de trace précisé . . . . .	249
2.2	Définition d'un problème approché . . . . .	250
2.3	Inégalité de l'énergie . . . . .	251
2.4	Estimations des dérivées fractionnaires en temps . . . . .	253
2.5	Passage à la limite. Existence d'une solution faible . . . . .	257
2.6	Unicité dans le cas $d = 2$ . . . . .	259
2.7	Existence de la pression . . . . .	261
3	Illustrations numériques . . . . .	261

X Table des matières

<b>VI</b>	<b>Conditions aux limites de Dirichlet par pénalisation - Couches limites</b>	263
1	Un exemple simple de couche limite	265
1.1	Petit problème 1D	265
1.2	Calcul exact	266
2	Enoncé du résultat principal	270
3	Ansatz	273
3.1	Développement asymptotique formel	275
3.2	Equations satisfaites par les différents termes	279
4	Existence et régularité des termes du développement asymptotique	284
5	Estimation sur les termes de reste	290
5.1	Equations satisfaites par les restes	291
5.2	Estimation proprement dite	295
<b>VII</b>	<b>Fluides non homogènes</b>	301
1	Résultats principaux	303
2	L'équation de transport	304
2.1	La méthode des caractéristiques	304
2.2	Solutions faibles	308
3	Problème approché pour les équations de Navier-Stokes non-homogènes	320
3.1	Définition du problème approché	321
3.2	Existence d'une solution du problème approché	321
3.3	Estimations <i>a priori</i>	329
4	Existence d'une solution faible	335
4.1	Convergences	335
4.2	Passage à la limite	337
4.3	Commentaires	339
<b>A</b>	<b>Opérateurs différentiels classiques</b>	341
1	Cas scalaire et vectoriel	341
1.1	Définitions	341
1.2	Formulaire	343
2	Extension aux tenseurs d'ordre 2	343
3	Théorème de la divergence - Formules de Stokes	344
<b>B</b>	<b>Compléments de thermodynamique</b>	347
1	Capacités calorifiques	347
2	Premier principe de la thermodynamique - Energie interne	348
3	Second principe de la thermodynamique	349
3.1	Entropie	349
3.2	Calcul de l'énergie interne	349
4	Variables spécifiques	350

<b>C Géométrie des ouverts réguliers</b> .....	353
1 Partitions de l'unité .....	354
2 Régularité des ouverts de $\mathbb{R}^d$ .....	357
2.1 Définition et caractérisations .....	357
2.2 Ouverts localement étoilés .....	359
3 Calcul sur le bord d'un ouvert régulier .....	362
3.1 Première forme fondamentale .....	363
3.2 Intégration et mesure sur $\Gamma$ .....	364
3.3 Gradient sur $\Gamma$ .....	365
3.4 Divergence sur $\Gamma$ .....	367
3.5 Seconde forme fondamentale .....	368
3.6 Théorème de traces et de prolongement .....	371
4 Application au calcul dans $\Omega$ au voisinage de $\Gamma$ .....	373
4.1 Paramétrage local de $\Omega$ près du bord .....	373
4.2 Fonction distance au bord et projection .....	375
4.3 Intégration près du bord .....	377
4.4 Gradient .....	379
4.5 Divergence .....	382
4.6 Laplacien .....	385
5 Caractérisation des espaces de Sobolev près du bord .....	385
<b>Références</b> .....	389
<b>Index</b> .....	397