
Table des matières

I	Equations de la mécanique des fluides	1
1	Coordonnées lagrangiennes et eulériennes	2
2	Le théorème du transport	4
3	Les équations de bilan	7
3.1	Premières équations de conservation	7
3.2	Théorème de Cauchy - Tenseur des contraintes	10
3.3	Retour aux équations de conservation - Symétrie du tenseur des contraintes	15
4	Lois de constitution : Fluides newtoniens et lois thermodynamiques	18
4.1	Fluide au repos	18
4.2	Hypothèse de Newton. Tenseur des taux de déformations .	19
4.3	Conséquences du second principe de la thermodynamique.	24
4.4	Equation pour l'énergie interne spécifique.....	26
4.5	Formulation en entropie et en température.....	27
5	Récapitulatif des équations	28
6	Modèles incompressibles	30
6.1	Vocabulaire	30
6.2	Vue d'ensemble des modèles étudiés.....	31
6.3	Modèles adimensionnés.....	32
7	Quelques solutions stationnaires exactes des équations de Navier-Stokes.....	35
7.1	Cadre général	36
7.2	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite.....	36
7.3	Ecoulement de cisaillement plan	38
7.4	Ecoulement de Couette entre deux cylindres	39
8	Commentaires bibliographiques	42
II	Rappels d'analyse	43
1	Résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle	44
1.1	Espaces de Banach	44

VIII Table des matières

1.2	Convergence faible, convergence faible-*	46
1.3	Espaces $L^p(\Omega)$	49
2	Résultats de compacité de base	57
2.1	Ensembles compacts	57
2.2	Applications compactes	59
2.3	Théorèmes de point fixe de Schauder	62
3	Espaces de Sobolev	63
3.1	Définitions	63
3.2	Dualité	64
3.3	Les espaces $H^{-m}(\Omega)$	66
3.4	Injections de Sobolev	69
3.5	Théorème de produit	75
3.6	Inégalités de Poincaré	78
4	Fonctions d'une variable réelle	80
4.1	Dérivation et primitives	80
4.2	Inégalités différentielles et lemmes de Gronwall	83
5	Espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach	87
5.1	Définition et premières propriétés	87
5.2	Exemples fondamentaux	89
5.3	Dérivée faible en temps	90
5.4	Théorèmes de continuité	91
5.5	Théorèmes de compacité	97
5.6	Transformation de Fourier à valeurs dans un Banach	101
III	Opérateurs gradient et divergence. Problème de Stokes	107
1	Les champs de gradient	108
1.1	Cas de l'espace entier	110
1.2	Cas des demi-espaces	111
1.3	Cas des ouverts bornés lipschitziens	118
1.4	Inégalités de Poincaré dans $L^2(\Omega)$ et espace $L_0^2(\Omega)$	120
1.5	Caractérisation des champs de gradient	123
2	Opérateur divergence	129
2.1	Champs de vecteurs à divergence L^2	129
2.2	Champs de vecteurs à divergence nulle - Décomposition de Leray	133
3	Problème de Stokes. Opérateur de Stokes	136
3.1	Rappels de théorie des opérateurs non-bornés	136
3.2	Application à l'opérateur de Stokes	143
3.3	Régularité elliptique de l'opérateur de Stokes et applications	148
4	Régularité du problème de Stokes	153
4.1	Problème de Stokes non-homogène	153
4.2	Premier cran de régularité	155
4.3	Régularité locale	155

4.4	Régularité au bord	162
4.5	Cas général du théorème de régularité	174
4.6	Théorie L^p du problème de Stokes	175
5	Problème de Stokes avec conditions aux limites en contrainte	177
5.1	Rappels sur l'opérateur de Laplace	178
5.2	Existence et unicité pour le problème de Stokes/Neumann	179
5.3	Propriétés de régularité	183
5.4	Conditions aux limites en contrainte	191
IV	Equations de Navier-Stokes pour un fluide homogène	199
1	Le théorème de J. Leray	200
1.1	Terme d'inertie	200
1.2	Formulations faibles des équations de Navier-Stokes	202
1.3	Enoncé du théorème de Leray	206
1.4	Problème approché	207
1.5	Estimations d'énergie	209
1.6	Passage à la limite	211
1.7	Problème d'unicité	214
1.8	Globalité des solutions faibles	216
1.9	Evolution de l'énergie	217
1.10	Existence et régularité de la pression	222
2	Solutions fortes	223
2.1	Nouvelles estimations	225
2.2	Le cas de la dimension 2	226
2.3	Le cas de la dimension 3	229
2.4	Régularité à tous ordres pour les équations de Navier-Stokes	235
2.5	Régularisation en temps	241
V	Conditions aux limites en sortie d'un écoulement	245
1	Mise en place du modèle	246
2	Le théorème d'existence et d'unicité	249
2.1	Théorème de trace précisé	249
2.2	Définition d'un problème approché	250
2.3	Inégalité de l'énergie	251
2.4	Estimations des dérivées fractionnaires en temps	253
2.5	Passage à la limite. Existence d'une solution faible	257
2.6	Unicité dans le cas $d = 2$	259
2.7	Existence de la pression	261
3	Illustrations numériques	261

VI	Conditions aux limites de Dirichlet	
	par pénalisation - Couches limites	263
1	Un exemple simple de couche limite	265
1.1	Petit problème 1D	265
1.2	Calcul exact	266
2	Enoncé du résultat principal	270
3	Ansatz	273
3.1	Développement asymptotique formel	275
3.2	Equations satisfaites par les différents termes	279
4	Existence et régularité des termes du développement asymptotique	284
5	Estimation sur les termes de reste	290
5.1	Equations satisfaites par les restes	291
5.2	Estimation proprement dite	295
VII	Fluides non homogènes	301
1	Résultats principaux	303
2	L'équation de transport	304
2.1	La méthode des caractéristiques	304
2.2	Solutions faibles	308
3	Problème approché pour les équations de Navier-Stokes non-homogènes	320
3.1	Définition du problème approché	321
3.2	Existence d'une solution du problème approché	321
3.3	Estimations <i>a priori</i>	329
4	Existence d'une solution faible	335
4.1	Convergences	335
4.2	Passage à la limite	337
4.3	Commentaires	339
A	Opérateurs différentiels classiques	341
1	Cas scalaire et vectoriel	341
1.1	Définitions	341
1.2	Formulaire	343
2	Extension aux tenseurs d'ordre 2	343
3	Théorème de la divergence - Formules de Stokes	344
B	Compléments de thermodynamique	347
1	Capacités calorifiques	347
2	Premier principe de la thermodynamique - Energie interne	348
3	Second principe de la thermodynamique	349
3.1	Entropie	349
3.2	Calcul de l'énergie interne	349
4	Variables spécifiques	350

C	Géométrie des ouverts réguliers	353
1	Partitions de l'unité	354
2	Régularité des ouverts de \mathbb{R}^d	357
2.1	Définition et caractérisations	357
2.2	Ouverts localement étoilés	359
3	Calcul sur le bord d'un ouvert régulier	362
3.1	Première forme fondamentale	363
3.2	Intégration et mesure sur Γ	364
3.3	Gradient sur Γ	365
3.4	Divergence sur Γ	367
3.5	Seconde forme fondamentale	368
3.6	Théorème de traces et de prolongement	371
4	Application au calcul dans Ω au voisinage de Γ	373
4.1	Paramétrage local de Ω près du bord	373
4.2	Fonction distance au bord et projection	375
4.3	Intégration près du bord	377
4.4	Gradient	379
4.5	Divergence	382
4.6	Laplacien	385
5	Caractérisation des espaces de Sobolev près du bord	385
	Références	389
	Index	397