Indice

CAPITOLO 2

Risoluzione di equazioni

Esercizi

Esercizio 2.1. Si determini l'insieme $\mathcal{S}$ delle soluzioni dell'equazione

$$x^2 - x + 3 = \frac{2x^3 + x^2 - 8x + 6}{x + 2}.$$

Esercizio 2.2. Trovare i valori positivi di x che soddisfano la relazione

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Esercizio 2.3. Risolvere l'equazione $x|x| - 6x + 7 = 0$.

Esercizio 2.4. Risolvere il sistema $\begin{cases} x < 1 - 2|x| \\ \\ 4x^2 + 7x - 2 \leq 0 \end{cases}.$

Esercizio 2.5. Un gitante si trova su una diga il cui muro è alto 284 m. Il gitante vorrebbe conoscere, da dove si trova, l'altezza della *colonna d'acqua* contro la diga. Per farlo, lancia una pietra nella direzione del lago, con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 10 m/s. La pietra raggiunge la superficie dell'acqua dopo 4 secondi. Qual è l'altezza della colonna d'acqua? (Per semplificare il calcolo e consentire una risoluzione senza calcolatrice, si assuma che l'accelerazione dovuta al peso sia di 10 m/s^2).

Esercizio 2.6. Un'automobile è ferma ad una distanza di 98 m da una persona. Ad un dato istante, essa parte e si muove con un'accelerazione costante. Se l'accelerazione è di 4 m/s^2, dopo quanto tempo la vettura passa davanti alla persona?

Se una seconda vettura, partita dalla stessa posizione, impiega il doppio del tempo per raggiungere la persona, qual è la sua accelerazione (ipotizzata costante)?

Esercizio 2.7. Risolvere

$$2\left(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}\right) = e^{\frac{1}{2}x} + 5e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Esercizio 2.8. a) Esplicitare y in funzione di x sapendo che

$$\ln(e^y - e^x) = y + \ln 2 - \ln(e^y + e^x).$$

b) Risolvere $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 2(x - 15)$.

Esercizio 2.9. Determinare il parametro p affinché il sistema

$$(S)\colon \begin{cases} (p+6)x + py = 3 \\ px + y = p - 2 \end{cases}$$

possieda un'infinità di soluzioni.

Esercizio 2.10. Si definisce *forma quadratica* un'espressione del tipo $Q(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, dove x e y sono delle variabili e a, b, c, d, e, f dei numeri reali. L'equazione $Q(x,y) = 0$ definisce, in generale, una conica.
Risolvere il sistema seguente (intersezione di una conica e di una retta):

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 7 = -1. \end{cases}$$

Esercizio 2.11. Trovare le coordinate nello spazio $\mathbb{R}^3$ dei punti rispettivamente posizionati:

a) su di un cerchio contenuto in un piano parallelo al piano Oxy, di centro $(2, 3, 4)$ e diametro uguale alla distanza di questi due piani;

b) nel piano passante per i punti $A = (1, 4, 8)$, $B = (2, 3, 4)$ e $C = (4, 1, 1)$.

(Vedere il capitolo 4).

Esercizio 2.12. Risolvere $|x| + |2 - x| \leqslant x + 1$.

Esercizio 2.13. Risolvere $x - 4 > \sqrt{2x(x-7)}$.

Esercizio 2.14. Utilizzando le relazioni $\mathrm{sgn}(xy) = \mathrm{sgn}(x) \cdot \mathrm{sgn}(y)$ per $xy \neq 0$ e $x \cdot \mathrm{sgn}(x) = |x|$ per $x \neq 0$, risolvere

$$|x| \cdot \left(24x^{-2} + \mathrm{sgn}(x^3 + x^2 + x)\right) < 10.$$

Esercizio 2.15. Determinare il dominio D del piano complesso definito da: $c|z - i| \leq |z + 4 + 7i|$ quando (a) $c = 1$, (b) $c = \sqrt{2}$.

Esercizio 2.16. Mostrare che per $a, b, c > 0$, si ottiene:

1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

2) $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$.

Elementi di Teoria

Si può trasformare un'equazione in una equivalente come segue:

- aggiungendo uno stesso termine ai due membri;
- moltiplicando o dividendo i due membri per un numero reale non nullo.

2.1 Equazioni algebriche

Si dice che un'equazione è algebrica su $\mathbb{R}$, rispettivamente su $\mathbb{C}$, se è della forma

$$P(x) = 0,$$

ove P è un polinomio a coefficienti reali, rispettivamente complessi. Tuttavia, un'equazione algebrica su $\mathbb{R}$ può avere come soluzione un numero complesso, per esempio $x^2 + e = 0$. Si osservi che un'equazione avente per soluzione un numero reale non è necessariamente algebrica su $\mathbb{R}$; per esempio, l'equazione non algebrica $e \cdot x - e^x = 0$ possiede la soluzione unica $x = 1$.

Proprietà. Se un numero complesso z è radice di un polinomio P a coefficienti reali, allora anche $\overline{z}$ è radice di P.

Ogni equazione algebrica su $\mathbb{C}$ si linearizza, vale a dire se $P(x)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi, allora esistono $z_1, \ldots, z_n$ tali che $P(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)$.

2.1.1 Equazioni lineari

L'equazione $ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) può anche essere scritta $ax = -b$. Se $a \neq 0$, allora la soluzione dell'equazione è $x = -\frac{b}{a}$.
Se $a = 0$ si ottiene $0 \cdot x = b$; in questo caso, se $b \neq 0$ l'equazione non ammette soluzione e se $b = 0$, ogni numero reale è soluzione dell'equazione.

Per risolvere graficamente $ax + b = 0$, è necessario aggiungere una dimensione per poter "rappresentare" l'equazione nel piano. Si traccerà dunque

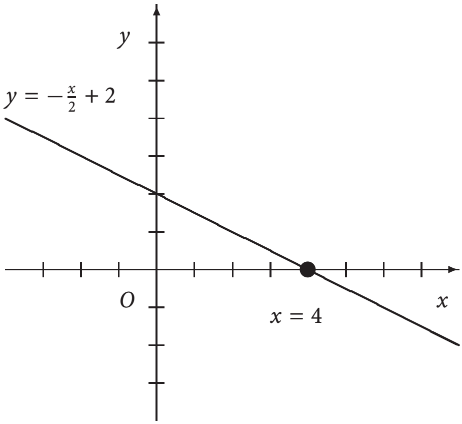

Figura 2.1

la retta $y = ax + b$ in $\mathbb{R}^2$ e la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione della retta con l'asse delle x (come in fig. 2.1).

Se si deve risolvere graficamente

$$ax + b = cx + d,$$

si può procedere in due modi: sia disegnare le rette $y = ax + b$ e $y = cx + d$, sia tracciare la retta $\tilde{y} = (a - c)x + (b - d)$. Nel primo caso la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione di due rette (vedere sezione 2.3.1), nel secondo caso ci si riconduce alla risoluzione di $\tilde{a}x + \tilde{b} = 0$.

2.1.2 Equazioni di secondo grado

Consideriamo l'equazione di secondo grado seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \text{ reali e } a \neq 0).$$

Dividendo tutti i coefficienti dell'equazione per a e ponendo $p = \frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$, la si può scrivere sotto la forma *normale*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si ottiene la soluzione di questa equazione completando il quadrato:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

che produce,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se ci si restringe a soluzioni reali, è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero; se questo è negativo, si ottengono come soluzioni dei numeri complessi. La situazione è la seguente:

$b^2 - 4ac > 0$	due radici reali
$b^2 - 4ac = 0$	una radice reale
$b^2 - 4ac < 0$	due radici complesse coniugate

Se l'equazione è sotto forma normale, si ottengono le relazioni seguenti tra le radici e i coefficienti (*formule di Viète*):

Formule di Viète.

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = q.$$

Queste formule si generalizzano a polinomi di grado superiore. In particolare, se si denotano con x_1, x_2 e x_3 le radici del polinomio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, allora le relazioni sono

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q, \qquad x_1x_2x_3 = -r.$$

2.2 Equazioni trascendenti

Tutte le equazioni non algebriche sono chiamate *trascendenti*. Tra queste si trovano le equazioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

2.2.1 Equazioni esponenziali

Esempi

1) Risolvere $4^{2x} = 8$.
Si riconducono i due membri dell'equazione ad una forma esponenziale avente la stessa base: $(2^2)^{2x} = 2^3$ o $2^{4x} = 2^3$; ne segue che $4x = 3$ e $x = \frac{3}{4}$.

2) Risolvere $9 \cdot 3^x \cdot 27^x = 81$.
Si scrive l'equazione sotto la forma: $3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{3x} = 3^4$ o $3^{2+4x} = 3^4$ e se ne deduce che $2 + 4x = 4$ dunque $x = \frac{1}{2}$.

3) Risolvere $7 \cdot 2^x + 2^{x+3} + 2^{x+2} = 76$.
L'equazione si scrive $2^x(7 + 8 + 4) = 76$ o $2^x = 2^2$ da cui si ottiene $x = 2$.

2.2.2 Equazioni logaritmiche

Esempi

1) Risolvere $\log_a(x + 1) + \log_a(3) = \log_a(6)$.
Affinché $\log_a(x + 1)$ esista, si deve avere $x > -1$; in questo caso, l'equazione si scrive: $\log_a(3x + 3) = \log_a(6)$, da cui $3x + 3 = 6$ e $x = 1$.

2) Risolvere $\log(x - 2) + \log(x - 5) = 1$.
Si deve cercare $x > 5$ affinché i due logaritmi siano definiti. Si scrive l'equazione sotto la forma: $\log(x^2 - 7x + 10) = 1$ e se ne deduce che x verifica $x^2 - 7x + 10 = 10$ le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 7$. Solo $x = 7$ soddisfa la condizione $x > 5$ ed è dunque la soluzione cercata.

3) Risolvere $3^{x+2} = 2^{3x-5}$.
Si uguagliano i logaritmi dei due membri dell'equazione e si ottiene: $\log(3^{x+2}) = \log(2^{3x-5})$ che si scrive $(x + 2)\log(3) = (2x - 5)\log(2)$, ciò implica $x = \dfrac{2\log(3) + 5\log(2)}{2\log(2) - \log(3)}$.

2.3 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni si dice *sotto-determinato* se ha più incognite che equazioni e *sovra-determinato* se ci sono più equazioni che incognite. In generale, un sistema d'equazioni sotto-determinato possiede un'infinità di soluzioni e un sistema sovra-determinato non possiede soluzioni. Ci si limiterà ai casi di due equazioni a due incognite, rispettivamente, tre equazioni a tre incognite e presenteremo due metodi di risoluzione che possono essere applicati altrettanto bene ad entrambi i casi.

2.3.1 Due equazioni in due incognite

Si consideri il sistema seguente:

$$\begin{cases} x + 3y = 15, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Il primo metodo di risoluzione è la *sostituzione*:
La seconda equazione, per esempio, si può scrivere $y = 2x - 2$; sostituendo y nella prima, si ottiene un'equazione ad una incognita e si trova $x = 3$, da cui $y = 4$, vedere 2.1.1.

Si può risolvere un tale sistema anche graficamente. Prendiamo per esempio le due equazioni

$$\begin{cases} y + 2 &= x + 3 \\ 2y + 3 &= -4x + 11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y &= x + 1 \\ y &= -2x + 4 \end{cases}$$

Se si rappresentano le due rette $y = x + 1$ e $y = -2x + 4$ nel piano, la loro intersezione $I(1; 2)$ fornisce la soluzione cercata (si veda la fig. 2.2).

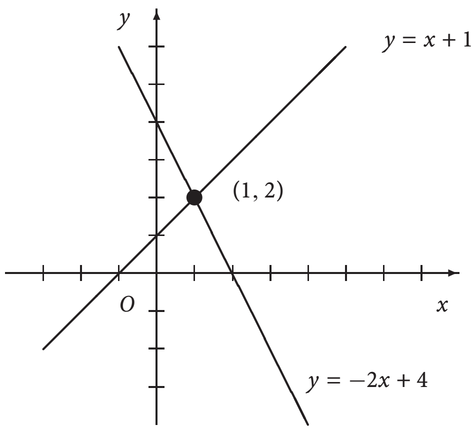

Figura 2.2

2.3.2 Tre equazioni in tre incognite

Il secondo metodo di risoluzione consiste nell'eliminazione di un'incognita ad ogni passo, utilizzando *combinazioni lineari*. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 3x - y + 2z = 2, \\ 2x + y - z = 4. \end{cases}$$

In questo esempio, si può eliminare l'incognita y se si sommano la prima equazione e la seconda, la seconda e la terza. In questo modo si ottiene:

$$\begin{cases} 4x + 3z = 7, \\ 5x + z = 6. \end{cases}$$

Da questo punto in poi si può procedere con lo stesso principio oppure procedere con una sostituzione, e si ottiene la soluzione $x = 1, y = 3$ e $z = 1$.

È anche possibile risolvere un tale sistema graficamente (per esempio in geometria descrittiva). In questo caso, ogni equazione rappresenta un piano in $\mathbb{R}^3$. La soluzione, se esiste, sarà data dall'intersezione dei piani.

2.4 Sistemi di equazioni non lineari

Questi sistemi provengono frequentemente da problemi geometrici.

2.4.1 Un'equazione lineare e un'equazione quadratica

Un tale sistema è facile da risolvere per sostituzione.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Si scrive $x = y + 1$, dalla seconda equazione, e sostituendo x nella prima, si ottiene l'equazione quadratica $y^2 - y - 2 = 0$ che ha per soluzioni $y_1 = -1$ e $y_2 = 2$; l'insieme delle soluzioni del sistema è allora
$\mathcal{S} = \{(x_1 = 0, y_1 = -1); (x_2 = 3, y_2 = 2)\}$.

2.4.2 Due equazioni quadratiche

Secondo la forma delle equazioni del sistema, si cercherà di combinarle al fine di ottenere il metodo di risoluzione più appropriato.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

In questo caso, si moltiplica la seconda equazione per 2 poi la si sottrae alla prima e si ottiene $-2x - 2y + 8 = 0$, riconducendosi dunque ad un sistema della forma precedente. Si può dunque scrivere $x = 4 - y$ e la si sostituisce nella prima equazione che diventa $y^2 - 4y + 3 = 0$ le cui soluzioni sono $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$. L'insieme delle soluzioni del sistema è dunque $\mathcal{S} = \{(x_1 = 3, y_1 = 1); (x_2 = 1, y_2 = 3)\}$.

Nel caso seguente, si risolve una delle equazioni considerando y come parametro; poi sostituendo il risultato nell'altro, si ottiene un'equazione quadratica in x le cui soluzioni permettono di trovare quelle del sistema.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 9, \\ x^2 - 6xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si scrive $(x - y)(x - 5y)$, da cui $x = y$ o $x = 5y$. Sostituendo, nella prima equazione, $x = y$, si ottiene $y = \pm\frac{3}{2}$; poi, con $x = 5y$, si ottiene $y = \pm\frac{3}{8}$. L'insieme delle soluzioni è dunque

$$\mathcal{S} = \left\{ (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}); (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}); (\frac{15}{8}, \frac{3}{8}); (-\frac{15}{8}, -\frac{3}{8}) \right\}.$$

2.5 Disuguaglianze

2.5.1 Disuguaglianze lineari

Sia data la disuguaglianza

$$ax + b > 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dipende essenzialmente dal valore di a.

Se $a = 0$, si ottiene la disuguaglianza $b > 0$. Se b è realmente maggiore di 0, la disuguaglianza è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. In caso contrario, non vi è soluzione.

Se $a \neq 0$, $ax > -b$ implica:

$$x > \frac{-b}{a} \text{ se } a > 0, \quad \text{ovvero } x \in]-b/a; +\infty[;$$

$$x < \frac{-b}{a} \text{ se } a < 0, \quad \text{ovvero } x \in]-\infty; -b/a[.$$

2.5.2 Disuguaglianze quadratiche

Si consideri il seguente polinomio di grado due: $P(x) = ax^2 + bx + c$ dove a, b, c sono reali e $a \neq 0$. Esso si scrive:

$$P(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

È facile dedurne che il segno di $P(x)$ dipende da quello di $b^2 - 4ac$ come segue:

1) se $b^2 - 4ac > 0$ allora l'equazione $P(x) = 0$ ha due radici distinte $x_1 < x_2$. Il segno di $P(x)$ è quello di a per $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, quello di $-a$ per $x \in]x_1, x_2[$;

2) se $b^2 - 4ac = 0$ allora il segno di $P(x)$ è quello di a per $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ dove x_0 è la radice doppia di $P(x) = 0$;

3) se $b^2 - 4ac < 0$ allora il segno di $P(x)$ è quello di a per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se ne evince che il segno di $P(x)$ è quello del coefficiente di x^2, fatto salvo il caso in cui x sia tra le radici di P, se ce ne sono.

Esempio. Risolvere la disuguaglianza $3x^2 - 8x + 7 > 2x^2 - 3x + 1$.
La si scrive sotto la forma: $x^2 - 5x + 6 > 0$ e si cercano le radici dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ che sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. La disuguaglianza data è soddisfatta quando $x < 2$ o $x > 3$.

2.5.3 Disuguaglianze a due variabili

Sia $P(x, y)$ un polinomio. Su ogni regione del piano delimitato dalla curva $P(x, y) = 0$, la funzione $P(x, y)$ mantiene un segno costante. Per determinarlo, è sufficiente valutare P in un punto specifico della regione.

Osservazione. Questa proprietà è valida quando $P(x)$ è un polinomio in una variabile, ed è generalizzabile anche in $\mathbb{R}^n$.

Esempio. Determinare il dominio del piano dove $P(x,y) = 2y + x - 4 > 0$.
La curva $P(x,y) = 0$ è una retta passante per i punti $(4,0)$ e $(0,2)$. Su ogni semipiano delimitato da questa retta, il segno di P non cambia. Poiché $P(0,0) = -4 < 0$ e $P(5,0) = 1 > 0$, la risposta è il semipiano delimitato dalla retta $P(x,y) = 0$ e contenente il punto $(5,0)$.

2.5.4 Disuguaglianze notevoli

Disuguaglianza triangolare. $\forall x, y, \in \mathbb{R}$:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Disuguaglianza delle medie.
Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0, x_2 > 0$. Allora,

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}}_{\text{media armonica}} \leqslant \underbrace{\sqrt[2]{x_1 x_2}}_{\text{media geometrica}} \leqslant \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\text{media aritmetica}}.$$

Si ha uguaglianza solo se $x_1 = x_2$.

Questa doppia disuguaglianza può essere generalizzata a n variabili $x_1, \ldots, x_n$.

Dimostrazione (caso $n = 2$).
Si ha $\dfrac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leqslant \sqrt{x_1 x_2}$ (1) , $\sqrt{x_1 x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2}$ (2).

La disuguaglianza (2) è equivalente a $4x_1x_2 \leqslant (x_1 + x_2)^2$ che è, a sua volta, equivalente a $0 \leqslant (x_1 - x_2)^2$, vera $\forall x_1, x_2$.

La disuguaglianza (1) è equivalente a $\dfrac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leqslant \sqrt{x_1x_2}$ che è, a sua volta, equivalente a (2), dunque vera.

Disuguaglianza di Bernoulli.
Per ogni intero naturale $n > 1$ e ogni numero reale $x > -1$, si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

L'uguaglianza si verifica solo se $x = 0$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
Siano $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$ dei numeri reali. Allora:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

Dimostrazione.
Consideriamo il seguente polinomio di grado due in λ ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i| + \lambda |y_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2.$$

Essendo questo polinomio positivo (o nullo) $\forall \lambda$, il suo discriminante sarà negativo (o uguale a zero); vale a dire, si avrà:

$$\left(2 \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leqslant 0$$

$$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2} \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|.$$

L'uguaglianza si ottiene solo se le $|x_i|$ sono proporzionali alle $|y_i|$.

Soluzioni

Soluzione 2.1. Si deve avere $x^3 - 9x = 0$, da cui $\mathcal{S} = \{-3, 0, 3\}$.

Soluzione 2.2. Per $x > 0$ e $x \neq 1$, ci si riconduce, dopo trasformazione dell'equazione, a $x^2 + x - 1 = 0$; si ottiene dunque $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Soluzione 2.3. Distinguendo i casi $x < 0$ e $x \geq 0$, si ottengono due equazioni di secondo grado: $x^2 + 6x - 7 = 0$ per $x < 0$ e $x^2 - 6x + 7 = 0$ per $x \geq 0$. Le radici ammissibili di tali equazioni sono $x_1 = -7, x_2 = 3 - \sqrt{2}, x_3 = 3 + \sqrt{2}$.

Soluzione 2.4. Dalla disequazione $x + 2|x| < 1$ si deduce

$$\begin{cases} -x < 1 & \text{per} \quad x < 0 \\ 3x < 1 & \text{per} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero $-1 < x < \frac{1}{3}$.
La seconda disequazione implica $-2 \leq x \leq \frac{1}{4}$, da cui la soluzione $-1 < x \leq \frac{1}{4}$.

Soluzione 2.5. L'altezza della colonna d'acqua è 224 m.

Soluzione 2.6. L'auto passa davanti alla persona dopo 7 secondi.
L'accelerazione cercata è di 1 m/s^2. Si osserva che quando l'accelerazione è divisa per quattro, il tempo raddoppia e non quadruplica!

Soluzione 2.7. Moltiplicando l'equazione per $e^{\frac{3}{2}x}$, si ottiene $2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$, vale a dire con $u = e^x$: $2u^3 - u^2 - 5u - 2 = 0$, da cui $u = -1$ o $-\frac{1}{2}$ o 2. La sola soluzione ammissibile è $x = \ln 2$.

Soluzione 2.8.

a) L'equazione data implica che $e^{2y} - e^{2x} = 2e^y$; in questo modo, e^y verifica l'equazione $t^2 - 2t - e^{2x} = 0$. Considerando solo la soluzione positiva, si ottiene allora $y = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

b) La condizione di esistenza è $x > 15$ e la disuguaglianza si può scrivere sotto la forma $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}2(x - 15))$, che è equivalente a

$$\ln(2x - 13 - \frac{15}{x}) > \ln(x - 15)$$

poiché $\log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$ e $\ln \frac{1}{2} < 0$. Se ne deduce $2x - 13 - \frac{15}{x} > x - 15$ che implica $x^2 + 2x - 15 > 0$, da cui $x \in (]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[)\cap]15, +\infty[$ ovvero $x \in]15, +\infty[$.

Soluzione 2.9. Si può interpretare il problema come intersezione di due rette: vi è un'infinita di soluzioni se le due rette coincidono. In particolare, i coefficienti di x e di y delle equazioni date devono essere necessariamente proporzionali, ovvero,

$$\frac{p+6}{p} = \frac{p}{1} \quad \text{o} \quad p^2 - p - 6 = 0 \quad \text{dunque} \quad p = -2 \ \text{ o } \ p = 3.$$

Per $p = -2$, (S) diventa $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$: questo sistema non ammette soluzione.

Per $p = 3$, (S) diventa $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$, di soluzione (x, y) tale che $y = 1 - 3x$, x arbitrario.

Soluzione 2.10. Per sostituzione, si ottengono due soluzioni; dunque due intersezioni: $(x, y) = (1, -3)$ o $(43, -17)$

Soluzione 2.11. Secondo il dato, è chiaro che i punti cercati sono nel piano di equazione $z = 4$. La loro terza coordinata è dunque 4.
Per trovare l'equazione del piano passante per A, B e C, si può cercare il suo vettore normale effettuando per esempio $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.
Con l'equazione del cerchio e l'equazione del piano, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \end{cases}$$

di soluzioni: $(2 - \sqrt{2},\ 3 + \sqrt{2},\ 4)$ e $(2 + \sqrt{2},\ 3 - \sqrt{2},\ 4)$.

Soluzione 2.12. Si studia la disuguaglianza seguendo i segni di x e di $2 - x$ e se ne deduce la soluzione: $x \in [1, 3]$.

Soluzione 2.13. Prima di tutto si fissano le condizioni di esistenza, poi ci si riconduce ad una equazione quadratica e si ottiene la soluzione: $x \in [7, 8[$.

Soluzione 2.14. Si ha:

$$\begin{aligned} 10 > 24\frac{|x|}{x^2} + |x|\operatorname{sgn}\left(x(x^2+x+1)\right) \\ = 24\frac{|x|}{|x|^2} + |x|\operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(x^2+x+1) = \frac{24}{|x|} + x \cdot 1, \end{aligned}$$

da cui $x|x| - 10|x| + 24 < 0$, ovvero anche

$$x^2 - 10x - 24 > 0 \ , \ x < 0$$
$$x^2 - 10x + 24 < 0 \ , \ x > 0$$

da cui $x \in]-\infty, -2[\cup]4, 6[$.

Soluzione 2.15.

a) Si deve avere $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq \sqrt{(x+4)^2 + (y+7)^2}$, ovvero, dopo elevazione al quadrato: $y \geq -\frac{1}{2}(x+8)$. Il dominio D è dunque il semipiano superiore limitato dalla retta d'equazione $x + 2y + 8 = 0$.

b) La disuguaglianza si riconduce a: $(x-4)^2 + (y-9)^2 \leq 160$. In questo caso, D è l'interno del disco centrato in $(4, 9)$ e di raggio $4\sqrt{10}$, frontiera inclusa.

Soluzione 2.16. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si può scrivere

1) $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}(b^2 + c^2 + a^2)^{1/2}$;

2) $3 = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq (a + b + c)^{1/2}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})^{1/2}$.