

Indice

Prefazione all'edizione italiana	V
Problemi di revisione	1
Argomenti trattati	1
Enunciati dei problemi	2
Soluzioni	7
1 Operazioni, struttura dei numeri	21
Esercizi	21
Elementi di teoria	25
1.1 Numeri	25
1.2 Operazioni sugli insiemi \mathbb{Q} e \mathbb{R}	26
1.3 Relazione d'ordine e insiemi ordinati	28
1.4 Divisione fra polinomi	28
1.5 Scomposizione in razionali fratti semplici	30
1.6 Potenze e radici	31
1.7 Esponenziale e logaritmo	31
1.8 Intervalli	33
1.9 Valore assoluto	34
1.10 Tecniche di dimostrazione	34
1.10.1 Dimostrazione diretta	34
1.10.2 Dimostrazione per assurdo (o indiretta)	35
1.10.3 Dimostrazione per induzione (o per ricorrenza)	35
1.10.4 Il ruolo delle ipotesi, condizioni necessarie e sufficienti	36
1.11 Nozioni di teoria degli insiemi	37
1.12 Introduzione al calcolo combinatorio	38
1.13 Introduzione all'insieme \mathbb{C} dei numeri complessi	40
1.13.1 Operazioni su \mathbb{C}	41
1.13.2 Rappresentazione polare dei numeri complessi	42

X.	Indice	
	1.13.3 Radici di un numero complesso	44
	Soluzioni	45
2	Risoluzione di equazioni	51
	Esercizi	51
	Elementi di teoria	54
	2.1 Equazioni algebriche	54
	2.1.1 Equazioni lineari	54
	2.1.2 Equazioni di secondo grado	55
	2.2 Equazioni trascendenti	56
	2.2.1 Equazioni esponenziali	57
	2.2.2 Equazioni logaritmiche	57
	2.3 Sistemi di equazioni lineari	57
	2.3.1 Due equazioni in due incognite	58
	2.3.2 Tre equazioni in tre incognite	59
	2.4 Sistemi di equazioni non lineari	59
	2.4.1 Un'equazione lineare e un'equazione quadratica	59
	2.4.2 Due equazioni quadratiche	60
	2.5 Disuguaglianze	60
	2.5.1 Disuguaglianze lineari	60
	2.5.2 Disuguaglianze quadratiche	61
	2.5.3 Disuguaglianze a due variabili	61
	2.5.4 Disuguaglianze notevoli	62
	Soluzioni	64
3	Funzioni	67
	Esercizi	67
	Elementi di teoria	69
	3.1 Nozioni generali	69
	3.2 Funzioni reali	70
	3.3 Funzioni reali particolari	72
	Soluzioni	76
4	Geometria	79
	Esercizi	79
	Elementi di teoria	82
	4.1 Geometria piana	82
	4.1.1 Nozioni di base	82
	4.1.2 Calcolo delle aree	88
	4.1.3 Sistemi di coordinate	89
	4.1.4 Equazione cartesiana e polare di una retta	90

4.1.5	Equazione cartesiana e polare di un cerchio	91
4.1.6	Rappresentazione parametrica di una curva	92
4.1.7	Sezioni coniche	93
4.2	Geometria nello spazio	97
4.2.1	Elementi di teoria	97
4.2.2	Calcolo di volumi e superfici	99
4.2.3	Equazione cartesiana di un piano	101
4.2.4	Equazioni cartesiane di una retta	101
4.2.5	Equazione cartesiana di una sfera	101
4.3	Geometria vettoriale	101
4.3.1	Vettori	101
4.3.2	Geometria vettoriale nel piano	107
4.3.3	Geometria vettoriale nello spazio	109
	Soluzioni	112
5	Trigonometria	117
	Esercizi	117
	Elementi di teoria	120
5.1	Misura di angoli e lunghezza di archi	120
5.2	Funzioni trigonometriche in un triangolo rettangolo	121
5.3	Il cerchio trigonometrico	122
5.4	Valori per angoli particolari	123
5.5	Curve rappresentative e proprietà delle funzioni trigonometriche	124
5.6	Qualche formula	125
5.7	Funzioni inverse di funzioni trigonometriche	129
5.8	Equazioni trigonometriche	129
5.9	Relazioni trigonometriche in un triangolo qualunque	131
	Soluzioni	133
6	Successioni, serie numeriche e limiti	139
	Esercizi	139
	Elementi di teoria	142
6.1	Insiemi	142
6.2	Successioni	142
6.2.1	Criteri di convergenza	144
6.2.2	Successioni per ricorrenza	145
6.3	Serie	146
6.3.1	Esempi di serie	147
6.4	Limite di una funzione e continuità	147
6.5	Asintoti	151
	Soluzioni	152

XIIIndice

7	Calcolo differenziale	157
	Esercizi	157
	Elementi di teoria	160
7.1	Nozioni fondamentali	160
7.2	Regole di derivazione e derivate di funzioni elementari	163
7.3	Teoremi	165
7.4	Derivate di ordine superiore	166
7.4.1	Caratterizzazione degli estremi	166
7.4.2	Variazioni locali del grafico di f	167
	Soluzioni	168
8	Calcolo integrale	173
	Esercizi	173
	Elementi di teoria	175
8.1	Primitiva	175
8.2	Integrale definito	176
8.3	Calcolo delle primitive, tecniche d'integrazione	178
	Soluzioni	180
9	Calcolo matriciale	183
	Esercizi	183
	Elementi di teoria	185
9.1	Conoscenze di base	185
9.2	Operazioni sulle matrici	186
9.2.1	Somma di due matrici	186
9.2.2	Moltiplicazione di una matrice per un numero reale	186
9.2.3	Prodotto di due matrici	187
9.2.4	Matrice trasposta	188
9.2.5	Determinante di matrici 2×2 e 3×3	188
9.2.6	Inversa di una matrice quadrata di ordine ≤ 3	190
9.3	Applicazioni del calcolo matriciale	192
9.3.1	Soluzione di sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite	192
	Soluzioni	193
	Bibliografia	195



Risoluzione di equazioni

Esercizi

Esercizio 2.1. Si determini l'insieme S delle soluzioni dell'equazione

$$x^2 - x + 3 = \frac{2x^3 + x^2 - 8x + 6}{x + 2}.$$

Esercizio 2.2. Trovare i valori positivi di x che soddisfano la relazione

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

Esercizio 2.3. Risolvere l'equazione $x|x| - 6x + 7 = 0$.

Esercizio 2.4. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} x < 1 - 2|x| \\ 4x^2 + 7x - 2 \leq 0 \end{cases}.$$

Esercizio 2.5. Un gitante si trova su una diga il cui muro è alto 284 m. Il gitante vorrebbe conoscere, da dove si trova, l'altezza della *colonna d'acqua* contro la diga. Per farlo, lancia una pietra nella direzione del lago, con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 10 m/s. La pietra raggiunge la superficie dell'acqua dopo 4 secondi. Qual è l'altezza della colonna d'acqua? (Per semplificare il calcolo e consentire una risoluzione senza calcolatrice, si assuma che l'accelerazione dovuta al peso sia di 10 m/s²).

Esercizio 2.6. Un'automobile è ferma ad una distanza di 98 m da una persona. Ad un dato istante, essa parte e si muove con un'accelerazione costante. Se l'accelerazione è di 4 m/s², dopo quanto tempo la vettura passa davanti alla persona?

52 2. Risoluzione di equazioni

Se una seconda vettura, partita dalla stessa posizione, impiega il doppio del tempo per raggiungere la persona, qual è la sua accelerazione (ipotizzata costante)?

Esercizio 2.7. Risolvere

$$2 \left(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x} \right) = e^{\frac{1}{2}x} + 5e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Esercizio 2.8. a) Esplicitare y in funzione di x sapendo che

$$\ln(e^y - e^x) = y + \ln 2 - \ln(e^y + e^x).$$

b) Risolvere $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 2(x - 15).$

Esercizio 2.9. Determinare il parametro p affinché il sistema

$$(S): \begin{cases} (p + 6)x + py = 3 \\ px + y = p - 2 \end{cases}$$

possieda un'infinità di soluzioni.

Esercizio 2.10. Si definisce *forma quadratica* un'espressione del tipo $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, dove x e y sono delle variabili e a, b, c, d, e, f dei numeri reali. L'equazione $Q(x, y) = 0$ definisce, in generale, una conica.

Risolvere il sistema seguente (intersezione di una conica e di una retta):

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 7 = -1. \end{cases}$$

Esercizio 2.11. Trovare le coordinate nello spazio \mathbb{R}^3 dei punti rispettivamente posizionati:

a) su di un cerchio contenuto in un piano parallelo al piano Oxy , di centro $(2, 3, 4)$ e diametro uguale alla distanza di questi due piani;

b) nel piano passante per i punti $A = (1, 4, 8)$, $B = (2, 3, 4)$ e $C = (4, 1, 1)$.

(Vedere il capitolo 4).

Esercizio 2.12. Risolvere $|x| + |2 - x| \leq x + 1$.

Esercizio 2.13. Risolvere $x - 4 > \sqrt{2x(x - 7)}$.

Esercizio 2.14. Utilizzando le relazioni $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$ per $xy \neq 0$ e $x \cdot \operatorname{sgn}(x) = |x|$ per $x \neq 0$, risolvere

$$|x| \cdot (24x^{-2} + \operatorname{sgn}(x^3 + x^2 + x)) < 10.$$

Esercizio 2.15. Determinare il dominio D del piano complesso definito da: $c|z - i| \leq |z + 4 + 7i|$ quando (a) $c = 1$, (b) $c = \sqrt{2}$.

Esercizio 2.16. Mostrare che per $a, b, c > 0$, si ottiene:

$$1) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca;$$

$$2) (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Elementi di Teoria

Si può trasformare un'equazione in una equivalente come segue:

- aggiungendo uno stesso termine ai due membri;
- moltiplicando o dividendo i due membri per un numero reale non nullo.

2.1 Equazioni algebriche

Si dice che un'equazione è algebrica su \mathbb{R} , rispettivamente su \mathbb{C} , se è della forma

$$P(x) = 0,$$

ove P è un polinomio a coefficienti reali, rispettivamente complessi. Tuttavia, un'equazione algebrica su \mathbb{R} può avere come soluzione un numero complesso, per esempio $x^2 + e = 0$. Si osservi che un'equazione avente per soluzione un numero reale non è necessariamente algebrica su \mathbb{R} ; per esempio, l'equazione non algebrica $e \cdot x - e^x = 0$ possiede la soluzione unica $x = 1$.

Proprietà. Se un numero complesso z è radice di un polinomio P a coefficienti reali, allora anche \bar{z} è radice di P .

Ogni equazione algebrica su \mathbb{C} si linearizza, vale a dire se $P(x)$ è un polinomio di grado n a coefficienti complessi, allora esistono z_1, \dots, z_n tali che $P(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n)$.

2.1.1 Equazioni lineari

L'equazione $ax + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) può anche essere scritta $ax = -b$. Se $a \neq 0$, allora la soluzione dell'equazione è $x = -\frac{b}{a}$.

Se $a = 0$ si ottiene $0 \cdot x = b$; in questo caso, se $b \neq 0$ l'equazione non ammette soluzione e se $b = 0$, ogni numero reale è soluzione dell'equazione.

Per risolvere graficamente $ax + b = 0$, è necessario aggiungere una dimensione per poter "rappresentare" l'equazione nel piano. Si tratterà dunque

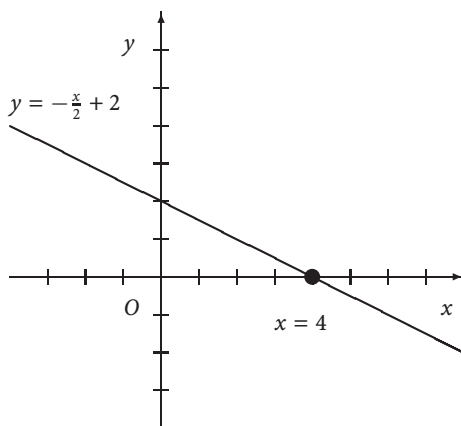


Figura 2.1

la retta $y = ax + b$ in \mathbb{R}^2 e la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione della retta con l'asse delle x (come in fig. 2.1).

Se si deve risolvere graficamente

$$ax + b = cx + d,$$

si può procedere in due modi: sia disegnare le rette $y = ax + b$ e $y = cx + d$, sia tracciare la retta $\tilde{y} = (a - c)x + (b - d)$. Nel primo caso la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione di due rette (vedere sezione 2.3.1), nel secondo caso ci si riconduce alla risoluzione di $\tilde{a}x + \tilde{b} = 0$.

2.1.2 Equazioni di secondo grado

Consideriamo l'equazione di secondo grado seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ reali e } a \neq 0).$$

Dividendo tutti i coefficienti dell'equazione per a e ponendo $p = \frac{b}{a}$ e $q = \frac{c}{a}$, la si può scrivere sotto la forma *normale*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si ottiene la soluzione di questa equazione completando il quadrato:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

56 2. Risoluzione di equazioni

che produce,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se ci si restringe a soluzioni reali, è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero; se questo è negativo, si ottengono come soluzioni dei numeri complessi. La situazione è la seguente:

$b^2 - 4ac > 0$	due radici reali
$b^2 - 4ac = 0$	una radice reale
$b^2 - 4ac < 0$	due radici complesse coniugate

Se l'equazione è sotto forma normale, si ottengono le relazioni seguenti tra le radici e i coefficienti (*formule di Viète*):

Formule di Viète.

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = q.$$

Queste formule si generalizzano a polinomi di grado superiore. In particolare, se si denotano con x_1 , x_2 e x_3 le radici del polinomio $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, allora le relazioni sono

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r.$$

2.2 Equazioni trascendenti

Tutte le equazioni non algebriche sono chiamate *trascendenti*. Tra queste si trovano le equazioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

2.2.1 Equazioni esponenziali

Esempi

1) Risolvere $4^{2x} = 8$.

Si riconducono i due membri dell'equazione ad una forma esponenziale avente la stessa base: $(2^2)^{2x} = 2^3$ o $2^{4x} = 2^3$; ne segue che $4x = 3$ e $x = \frac{3}{4}$.

2) Risolvere $9 \cdot 3^x \cdot 27^x = 81$.

Si scrive l'equazione sotto la forma: $3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{3x} = 3^4$ o $3^{2+4x} = 3^4$ e se ne deduce che $2 + 4x = 4$ dunque $x = \frac{1}{2}$.

3) Risolvere $7 \cdot 2^x + 2^{x+3} + 2^{x+2} = 76$.

L'equazione si scrive $2^x(7 + 8 + 4) = 76$ o $2^x = 2^2$ da cui si ottiene $x = 2$.

2.2.2 Equazioni logaritmiche

Esempi

1) Risolvere $\log_a(x+1) + \log_a(3) = \log_a(6)$.

Affinché $\log_a(x+1)$ esista, si deve avere $x > -1$; in questo caso, l'equazione si scrive: $\log_a(3x+3) = \log_a(6)$, da cui $3x+3 = 6$ e $x = 1$.

2) Risolvere $\log(x-2) + \log(x-5) = 1$.

Si deve cercare $x > 5$ affinché i due logaritmi siano definiti. Si scrive l'equazione sotto la forma: $\log(x^2 - 7x + 10) = 1$ e se ne deduce che x verifica $x^2 - 7x + 10 = 10$ le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 7$. Solo $x = 7$ soddisfa la condizione $x > 5$ ed è dunque la soluzione cercata.

3) Risolvere $3^{x+2} = 2^{3x-5}$.

Si uguagliano i logaritmi dei due membri dell'equazione e si ottiene: $\log(3^{x+2}) = \log(2^{3x-5})$ che si scrive $(x+2)\log(3) = (3x-5)\log(2)$, ciò implica $x = \frac{2\log(3) + 5\log(2)}{2\log(2) - \log(3)}$.

2.3 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni si dice *sotto-determinato* se ha più incognite che equazioni e *sovra-determinato* se ci sono più equazioni che incognite. In generale, un sistema d'equazioni sotto-determinato possiede un'infinità di soluzioni e un sistema sovra-determinato non possiede soluzioni. Ci si limiterà ai casi di due equazioni a due incognite, rispettivamente, tre equazioni a tre incognite e presenteremo due metodi di risoluzione che possono essere applicati altrettanto bene ad entrambi i casi.

2.3.1 Due equazioni in due incognite

Si consideri il sistema seguente:

$$\begin{cases} x + 3y = 15, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Il primo metodo di risoluzione è la *sostituzione*:

La seconda equazione, per esempio, si può scrivere $y = 2x - 2$; sostituendo y nella prima, si ottiene un'equazione ad una incognita e si trova $x = 3$, da cui $y = 4$, vedere 2.1.1.

Si può risolvere un tale sistema anche graficamente. Prendiamo per esempio le due equazioni

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ 2y + 3 = -4x + 11 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Se si rappresentano le due rette $y = x + 1$ e $y = -2x + 4$ nel piano, la loro intersezione $I(1; 2)$ fornisce la soluzione cercata (si veda la fig. 2.2).

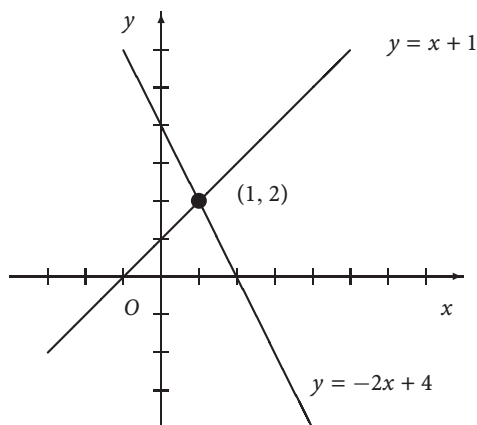


Figura 2.2

2.3.2 Tre equazioni in tre incognite

Il secondo metodo di risoluzione consiste nell'eliminazione di un'incognita ad ogni passo, utilizzando *combinazioni lineari*. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 3x - y + 2z = 2, \\ 2x + y - z = 4. \end{cases}$$

In questo esempio, si può eliminare l'incognita y se si sommano la prima equazione e la seconda, la seconda e la terza. In questo modo si ottiene:

$$\begin{cases} 4x + 3z = 7, \\ 5x + z = 6. \end{cases}$$

Da questo punto in poi si può procedere con lo stesso principio oppure procedere con una sostituzione, e si ottiene la soluzione $x = 1, y = 3$ e $z = 1$.

È anche possibile risolvere un tale sistema graficamente (per esempio in geometria descrittiva). In questo caso, ogni equazione rappresenta un piano in \mathbb{R}^3 . La soluzione, se esiste, sarà data dall'intersezione dei piani.

2.4 Sistemi di equazioni non lineari

Questi sistemi provengono frequentemente da problemi geometrici.

2.4.1 Un'equazione lineare e un'equazione quadratica

Un tale sistema è facile da risolvere per sostituzione.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Si scrive $x = y + 1$, dalla seconda equazione, e sostituendo x nella prima, si ottiene l'equazione quadratica $y^2 - y - 2 = 0$ che ha per soluzioni $y_1 = -1$ e $y_2 = 2$; l'insieme delle soluzioni del sistema è allora $S = \{(x_1 = 0, y_1 = -1); (x_2 = 3, y_2 = 2)\}$.

2.4.2 Due equazioni quadratiche

Secondo la forma delle equazioni del sistema, si cercherà di combinarle al fine di ottenere il metodo di risoluzione più appropriato.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

In questo caso, si moltiplica la seconda equazione per 2 poi la si sottrae alla prima e si ottiene $-2x - 2y + 8 = 0$, riconducendosi dunque ad un sistema della forma precedente. Si può dunque scrivere $x = 4 - y$ e la si sostituisce nella prima equazione che diventa $y^2 - 4y + 3 = 0$ le cui soluzioni sono $y_1 = 1$ e $y_2 = 3$. L'insieme delle soluzioni del sistema è dunque $S = \{(x_1 = 3, y_1 = 1); (x_2 = 1, y_2 = 3)\}$.

Nel caso seguente, si risolve una delle equazioni considerando y come parametro; poi sostituendo il risultato nell'altro, si ottiene un'equazione quadratica in x le cui soluzioni permettono di trovare quelle del sistema.

Esempio. Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 9, \\ x^2 - 6xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si scrive $(x - y)(x - 5y)$, da cui $x = y$ o $x = 5y$. Sostituendo, nella prima equazione, $x = y$, si ottiene $y = \pm \frac{3}{2}$; poi, con $x = 5y$, si ottiene $y = \pm \frac{3}{8}$. L'insieme delle soluzioni è dunque

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right); \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right); \left(\frac{15}{8}, \frac{3}{8} \right); \left(-\frac{15}{8}, -\frac{3}{8} \right) \right\}.$$

2.5 Disuguaglianze

2.5.1 Disuguaglianze lineari

Sia data la disuguaglianza

$$ax + b > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dipende essenzialmente dal valore di a .

Se $a = 0$, si ottiene la disuguaglianza $b > 0$. Se b è realmente maggiore di 0, la disuguaglianza è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$. In caso contrario, non vi è soluzione.

Se $a \neq 0$, $ax > -b$ implica:

$$x > \frac{-b}{a} \text{ se } a > 0, \quad \text{ovvero } x \in] -b/a; +\infty[;$$

$$x < \frac{-b}{a} \text{ se } a < 0, \quad \text{ovvero } x \in] -\infty; -b/a[.$$

2.5.2 Disuguaglianze quadratiche

Si consideri il seguente polinomio di grado due: $P(x) = ax^2 + bx + c$ dove a, b, c sono reali e $a \neq 0$. Esso si scrive:

$$P(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

È facile dedurre che il segno di $P(x)$ dipende da quello di $b^2 - 4ac$ come segue:

1) se $b^2 - 4ac > 0$ allora l'equazione $P(x) = 0$ ha due radici distinte $x_1 < x_2$. Il segno di $P(x)$ è quello di a per $x \in] -\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, quello di $-a$ per $x \in]x_1, x_2[$;

2) se $b^2 - 4ac = 0$ allora il segno di $P(x)$ è quello di a per $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ dove x_0 è la radice doppia di $P(x) = 0$;

3) se $b^2 - 4ac < 0$ allora il segno di $P(x)$ è quello di a per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se ne evince che il segno di $P(x)$ è quello del coefficiente di x^2 , fatto salvo il caso in cui x sia tra le radici di P , se ce ne sono.

Esempio. Risolvere la disuguaglianza $3x^2 - 8x + 7 > 2x^2 - 3x + 1$.

La si scrive sotto la forma: $x^2 - 5x + 6 > 0$ e si cercano le radici dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ che sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. La disuguaglianza data è soddisfatta quando $x < 2$ o $x > 3$.

2.5.3 Disuguaglianze a due variabili

Sia $P(x, y)$ un polinomio. Su ogni regione del piano delimitato dalla curva $P(x, y) = 0$, la funzione $P(x, y)$ mantiene un segno costante. Per determinarlo, è sufficiente valutare P in un punto specifico della regione.

Osservazione. Questa proprietà è valida quando $P(x)$ è un polinomio in una variabile, ed è generalizzabile anche in \mathbb{R}^n .

Esempio. Determinare il dominio del piano dove $P(x, y) = 2y + x - 4 > 0$. La curva $P(x, y) = 0$ è una retta passante per i punti $(4, 0)$ e $(0, 2)$. Su ogni semipiano delimitato da questa retta, il segno di P non cambia. Poiché $P(0, 0) = -4 < 0$ e $P(5, 0) = 1 > 0$, la risposta è il semipiano delimitato dalla retta $P(x, y) = 0$ e contenente il punto $(5, 0)$.

2.5.4 Disuguaglianze notevoli

Disuguaglianza triangolare. $\forall x, y, \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Disuguaglianza delle medie.

Siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0, x_2 > 0$. Allora,

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}}_{\text{media armonica}} \leq \underbrace{\sqrt{x_1 x_2}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\text{media aritmetica}}.$$

Si ha uguaglianza solo se $x_1 = x_2$.

Questa doppia disuguaglianza può essere generalizzata a n variabili x_1, \dots, x_n .

Dimostrazione (caso $n = 2$).

Si ha $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2}$ (1), $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$ (2).

La disuguaglianza (2) è equivalente a $4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$ che è, a sua volta, equivalente a $0 \leq (x_1 - x_2)^2$, vera $\forall x_1, x_2$.

La disuguaglianza (1) è equivalente a $\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2}$ che è, a sua volta, equivalente a (2), dunque vera.

Disuguaglianza di Bernoulli.

Per ogni intero naturale $n > 1$ e ogni numero reale $x > -1$, si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

L'uguaglianza si verifica solo se $x = 0$.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Siano (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_n) dei numeri reali. Allora:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Dimostrazione.

Consideriamo il seguente polinomio di grado due in λ ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n (|x_i| + \lambda |y_i|)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \lambda^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2.$$

Essendo questo polinomio positivo (o nullo) $\forall \lambda$, il suo discriminante sarà negativo (o uguale a zero); vale a dire, si avrà:

$$\begin{aligned} \left(2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 &\leq 0 \\ \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} &\geq \left| \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right| = \sum_{i=1}^n |x_i y_i|. \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ottiene solo se le $|x_i|$ sono proporzionali alle $|y_i|$.

Soluzioni

Soluzione 2.1. Si deve avere $x^3 - 9x = 0$, da cui $S = \{-3, 0, 3\}$.

Soluzione 2.2. Per $x > 0$ e $x \neq 1$, ci si riconduce, dopo trasformazione dell'equazione, a $x^2 + x - 1 = 0$; si ottiene dunque $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Soluzione 2.3. Distinguendo i casi $x < 0$ e $x \geq 0$, si ottengono due equazioni di secondo grado: $x^2 + 6x - 7 = 0$ per $x < 0$ e $x^2 - 6x + 7 = 0$ per $x \geq 0$. Le radici ammissibili di tali equazioni sono $x_1 = -7$, $x_2 = 3 - \sqrt{2}$, $x_3 = 3 + \sqrt{2}$.

Soluzione 2.4. Dalla disequazione $x + 2|x| < 1$ si deduce

$$\begin{cases} -x < 1 & \text{per } x < 0 \\ 3x < 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero $-1 < x < \frac{1}{3}$.

La seconda disequazione implica $-2 \leq x \leq \frac{1}{4}$, da cui la soluzione $-1 < x \leq \frac{1}{4}$.

Soluzione 2.5. L'altezza della colonna d'acqua è 224 m.

Soluzione 2.6. L'auto passa davanti alla persona dopo 7 secondi.

L'accelerazione cercata è di 1 m/s^2 . Si osserva che quando l'accelerazione è divisa per quattro, il tempo raddoppia e non quadruplica!

Soluzione 2.7. Moltiplicando l'equazione per $e^{\frac{3}{2}x}$, si ottiene $2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$, vale a dire con $u = e^x$: $2u^3 - u^2 - 5u - 2 = 0$, da cui $u = -1$ o $-\frac{1}{2}$ o 2 . La sola soluzione ammissibile è $x = \ln 2$.

Soluzione 2.8.

a) L'equazione data implica che $e^{2y} - e^{2x} = 2e^y$; in questo modo, e^y verifica l'equazione $t^2 - 2t - e^{2x} = 0$. Considerando solo la soluzione positiva, si ottiene allora $y = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

b) La condizione di esistenza è $x > 15$ e la disuguaglianza si può scrivere sotto la forma $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}2(x - 15))$, che è equivalente a

$$\ln(2x - 13 - \frac{15}{x}) > \ln(x - 15)$$

poiché $\log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$ e $\ln \frac{1}{2} < 0$. Se ne deduce $2x - 13 - \frac{15}{x} > x - 15$ che implica $x^2 + 2x - 15 > 0$, da cui $x \in (]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[) \cap]15, +\infty[$ ovvero $x \in]15, +\infty[$.

Soluzione 2.9. Si può interpretare il problema come intersezione di due rette: vi è un'infinita di soluzioni se le due rette coincidono. In particolare, i coefficienti di x e di y delle equazioni date devono essere necessariamente proporzionali, ovvero,

$$\frac{p+6}{p} = \frac{p}{1} \quad \text{o} \quad p^2 - p - 6 = 0 \quad \text{dunque} \quad p = -2 \quad \text{o} \quad p = 3.$$

Per $p = -2$, (S) diventa $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$: questo sistema non ammette soluzione.

Per $p = 3$, (S) diventa $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$, di soluzione (x, y) tale che $y = 1 - 3x$, x arbitrario.

Soluzione 2.10. Per sostituzione, si ottengono due soluzioni; dunque due intersezioni: $(x, y) = (1, -3)$ o $(43, -17)$

Soluzione 2.11. Secondo il dato, è chiaro che i punti cercati sono nel piano di equazione $z = 4$. La loro terza coordinata è dunque 4.

Per trovare l'equazione del piano passante per A, B e C , si può cercare il suo vettore normale effettuando per esempio $\vec{AB} \times \vec{AC}$.

Con l'equazione del cerchio e l'equazione del piano, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

di soluzioni: $(2 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 4)$ e $(2 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, 4)$.

Soluzione 2.12. Si studia la disuguaglianza seguendo i segni di x e di $2 - x$ e se ne deduce la soluzione: $x \in [1, 3]$.

Soluzione 2.13. Prima di tutto si fissano le condizioni di esistenza, poi ci si riconduce ad una equazione quadratica e si ottiene la soluzione: $x \in [7, 8]$.

Soluzione 2.14. Si ha:

$$\begin{aligned} 10 &> 24 \frac{|x|}{x^2} + |x| \operatorname{sgn}(x(x^2 + x + 1)) \\ &= 24 \frac{|x|}{|x|^2} + |x| \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 + x + 1) = \frac{24}{|x|} + x \cdot 1, \end{aligned}$$

da cui $x|x| - 10|x| + 24 < 0$, ovvero anche

$$x^2 - 10x - 24 > 0, \quad x < 0$$

$$x^2 - 10x + 24 < 0, \quad x > 0$$

da cui $x \in]-\infty, -2[\cup]4, 6[$.

Soluzione 2.15.

a) Si deve avere $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq \sqrt{(x+4)^2 + (y+7)^2}$, ovvero, dopo elevazione al quadrato: $y \geq -\frac{1}{2}(x+8)$. Il dominio D è dunque il semipiano superiore limitato dalla retta d'equazione $x + 2y + 8 = 0$.

b) La disuguaglianza si riconduce a: $(x-4)^2 + (y-9)^2 \leq 160$. In questo caso, D è l'interno del disco centrato in $(4, 9)$ e di raggio $4\sqrt{10}$, frontiera inclusa.

Soluzione 2.16. Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si può scrivere

$$1) a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} (b^2 + c^2 + a^2)^{1/2};$$

$$2) 3 = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq (a + b + c)^{1/2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^{1/2}.$$