

# Indice

<b>Prefazione all'edizione italiana</b>	<b>V</b>
<b>Problemi di revisione</b>	<b>1</b>
Argomenti trattati . . . . .	1
Enunciati dei problemi . . . . .	2
Soluzioni . . . . .	7
<b>1 Operazioni, struttura dei numeri</b>	<b>21</b>
Esercizi . . . . .	21
Elementi di teoria . . . . .	25
1.1 Numeri . . . . .	25
1.2 Operazioni sugli insiemi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ . . . . .	26
1.3 Relazione d'ordine e insiemi ordinati . . . . .	28
1.4 Divisione fra polinomi . . . . .	28
1.5 Scomposizione in razionali fratti semplici . . . . .	30
1.6 Potenze e radici . . . . .	31
1.7 Esponenziale e logaritmo . . . . .	31
1.8 Intervalli . . . . .	33
1.9 Valore assoluto . . . . .	34
1.10 Tecniche di dimostrazione . . . . .	34
1.10.1 Dimostrazione diretta . . . . .	34
1.10.2 Dimostrazione per assurdo (o indiretta) . . . . .	35
1.10.3 Dimostrazione per induzione (o per ricorrenza) . . . . .	35
1.10.4 Il ruolo delle ipotesi, condizioni necessarie e sufficienti . . . . .	36
1.11 Nozioni di teoria degli insiemi . . . . .	37
1.12 Introduzione al calcolo combinatorio . . . . .	38
1.13 Introduzione all'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi . . . . .	40
1.13.1 Operazioni su $\mathbb{C}$ . . . . .	41
1.13.2 Rappresentazione polare dei numeri complessi . . . . .	42

<b>X. . . . .</b>	<b>Indice . . . . .</b>	
	1.13.3 Radici di un numero complesso . . . . .	44
	Soluzioni . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Risoluzione di equazioni . . . . .</b>	<b>51</b>
	Esercizi . . . . .	51
	Elementi di teoria . . . . .	54
	2.1 Equazioni algebriche . . . . .	54
	2.1.1 Equazioni lineari . . . . .	54
	2.1.2 Equazioni di secondo grado . . . . .	55
	2.2 Equazioni trascendenti . . . . .	56
	2.2.1 Equazioni esponenziali . . . . .	57
	2.2.2 Equazioni logaritmiche . . . . .	57
	2.3 Sistemi di equazioni lineari . . . . .	57
	2.3.1 Due equazioni in due incognite . . . . .	58
	2.3.2 Tre equazioni in tre incognite . . . . .	59
	2.4 Sistemi di equazioni non lineari . . . . .	59
	2.4.1 Un'equazione lineare e un'equazione quadratica . . . . .	59
	2.4.2 Due equazioni quadratiche . . . . .	60
	2.5 Disuguaglianze . . . . .	60
	2.5.1 Disuguaglianze lineari . . . . .	60
	2.5.2 Disuguaglianze quadratiche . . . . .	61
	2.5.3 Disuguaglianze a due variabili . . . . .	61
	2.5.4 Disuguaglianze notevoli . . . . .	62
	Soluzioni . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Funzioni . . . . .</b>	<b>67</b>
	Esercizi . . . . .	67
	Elementi di teoria . . . . .	69
	3.1 Nozioni generali . . . . .	69
	3.2 Funzioni reali . . . . .	70
	3.3 Funzioni reali particolari . . . . .	72
	Soluzioni . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Geometria . . . . .</b>	<b>79</b>
	Esercizi . . . . .	79
	Elementi di teoria . . . . .	82
	4.1 Geometria piana . . . . .	82
	4.1.1 Nozioni di base . . . . .	82
	4.1.2 Calcolo delle aree . . . . .	88
	4.1.3 Sistemi di coordinate . . . . .	89
	4.1.4 Equazione cartesiana e polare di una retta . . . . .	90

4.1.5	Equazione cartesiana e polare di un cerchio . . . . .	91
4.1.6	Rappresentazione parametrica di una curva . . . . .	92
4.1.7	Sezioni coniche . . . . .	93
4.2	Geometria nello spazio . . . . .	97
4.2.1	Elementi di teoria . . . . .	97
4.2.2	Calcolo di volumi e superfici . . . . .	99
4.2.3	Equazione cartesiana di un piano . . . . .	101
4.2.4	Equazioni cartesiane di una retta . . . . .	101
4.2.5	Equazione cartesiana di una sfera . . . . .	101
4.3	Geometria vettoriale . . . . .	101
4.3.1	Vettori . . . . .	101
4.3.2	Geometria vettoriale nel piano . . . . .	107
4.3.3	Geometria vettoriale nello spazio . . . . .	109
	Soluzioni . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Trigonometria</b> . . . . .	<b>117</b>
	Esercizi . . . . .	117
	Elementi di teoria . . . . .	120
5.1	Misura di angoli e lunghezza di archi . . . . .	120
5.2	Funzioni trigonometriche in un triangolo rettangolo . . . . .	121
5.3	Il cerchio trigonometrico . . . . .	122
5.4	Valori per angoli particolari . . . . .	123
5.5	Curve rappresentative e proprietà delle funzioni trigonometriche . . . . .	124
5.6	Qualche formula . . . . .	125
5.7	Funzioni inverse di funzioni trigonometriche . . . . .	129
5.8	Equazioni trigonometriche . . . . .	129
5.9	Relazioni trigonometriche in un triangolo qualunque . . . . .	131
	Soluzioni . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Successioni, serie numeriche e limiti</b> . . . . .	<b>139</b>
	Esercizi . . . . .	139
	Elementi di teoria . . . . .	142
6.1	Insiemi . . . . .	142
6.2	Successioni . . . . .	142
6.2.1	Criteri di convergenza . . . . .	144
6.2.2	Successioni per ricorrenza . . . . .	145
6.3	Serie . . . . .	146
6.3.1	Esempi di serie . . . . .	147
6.4	Limite di una funzione e continuità . . . . .	147
6.5	Asintoti . . . . .	151
	Soluzioni . . . . .	152

<b>XII</b>	<b>Indice</b>	
<b>7</b>	<b>Calcolo differenziale</b>	<b>157</b>
	Esercizi	157
	Elementi di teoria	160
	7.1 Nozioni fondamentali	160
	7.2 Regole di derivazione e derivate di funzioni elementari	163
	7.3 Teoremi	165
	7.4 Derivate di ordine superiore	166
	7.4.1 Caratterizzazione degli estremi	166
	7.4.2 Variazioni locali del grafico di $f$	167
	Soluzioni	168
<b>8</b>	<b>Calcolo integrale</b>	<b>173</b>
	Esercizi	173
	Elementi di teoria	175
	8.1 Primitiva	175
	8.2 Integrale definito	176
	8.3 Calcolo delle primitive, tecniche d'integrazione	178
	Soluzioni	180
<b>9</b>	<b>Calcolo matriciale</b>	<b>183</b>
	Esercizi	183
	Elementi di teoria	185
	9.1 Conoscenze di base	185
	9.2 Operazioni sulle matrici	186
	9.2.1 Somma di due matrici	186
	9.2.2 Moltiplicazione di una matrice per un numero reale	186
	9.2.3 Prodotto di due matrici	187
	9.2.4 Matrice trasposta	188
	9.2.5 Determinante di matrici $2 \times 2$ e $3 \times 3$	188
	9.2.6 Inversa di una matrice quadrata di ordine $\leq 3$	190
	9.3 Applicazioni del calcolo matriciale	192
	9.3.1 Soluzione di sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite	192
	Soluzioni	193
	<b>Bibliografia</b>	<b>195</b>



## Risoluzione di equazioni

### Esercizi

**Esercizio 2.1.** Si determini l'insieme  $S$  delle soluzioni dell'equazione

$$x^2 - x + 3 = \frac{2x^3 + x^2 - 8x + 6}{x + 2}.$$

**Esercizio 2.2.** Trovare i valori positivi di  $x$  che soddisfano la relazione

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

**Esercizio 2.3.** Risolvere l'equazione  $x|x| - 6x + 7 = 0$ .

**Esercizio 2.4.** Risolvere il sistema 
$$\begin{cases} x < 1 - 2|x| \\ 4x^2 + 7x - 2 \leq 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 2.5.** Un gigante si trova su una diga il cui muro è alto 284 m. Il gigante vorrebbe conoscere, da dove si trova, l'altezza della *colonna d'acqua* contro la diga. Per farlo, lancia una pietra nella direzione del lago, con un angolo di  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale e con una velocità di 10 m/s. La pietra raggiunge la superficie dell'acqua dopo 4 secondi. Qual è l'altezza della colonna d'acqua? (Per semplificare il calcolo e consentire una risoluzione senza calcolatrice, si assuma che l'accelerazione dovuta al peso sia di 10 m/s<sup>2</sup>).

**Esercizio 2.6.** Un'automobile è ferma ad una distanza di 98 m da una persona. Ad un dato istante, essa parte e si muove con un'accelerazione costante. Se l'accelerazione è di 4 m/s<sup>2</sup>, dopo quanto tempo la vettura passa davanti alla persona?

52 . . . . 2. Risoluzione di equazioni . . . . .

Se una seconda vettura, partita dalla stessa posizione, impiega il doppio del tempo per raggiungere la persona, qual è la sua accelerazione (ipotizzata costante)?

**Esercizio 2.7.** Risolvere

$$2 \left( e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x} \right) = e^{\frac{1}{2}x} + 5e^{-\frac{1}{2}x}.$$

**Esercizio 2.8.** a) Esplicitare  $y$  in funzione di  $x$  sapendo che

$$\ln(e^y - e^x) = y + \ln 2 - \ln(e^y + e^x).$$

b) Risolvere  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < 1 + \log_{\frac{1}{2}} 2(x - 15)$ .

**Esercizio 2.9.** Determinare il parametro  $p$  affinché il sistema

$$(S): \begin{cases} (p + 6)x + py = 3 \\ px + y = p - 2 \end{cases}$$

possieda un'infinità di soluzioni.

**Esercizio 2.10.** Si definisce *forma quadratica* un'espressione del tipo  $Q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ , dove  $x$  e  $y$  sono delle variabili e  $a, b, c, d, e, f$  dei numeri reali. L'equazione  $Q(x, y) = 0$  definisce, in generale, una conica.

Risolvere il sistema seguente (intersezione di una conica e di una retta):

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 7 = -1. \end{cases}$$

**Esercizio 2.11.** Trovare le coordinate nello spazio  $\mathbb{R}^3$  dei punti rispettivamente posizionati:

- a) su di un cerchio contenuto in un piano parallelo al piano  $Oxy$ , di centro  $(2, 3, 4)$  e diametro uguale alla distanza di questi due piani;
- b) nel piano passante per i punti  $A = (1, 4, 8)$ ,  $B = (2, 3, 4)$  e  $C = (4, 1, 1)$ .

(Vedere il capitolo 4).

**Esercizio 2.12.** Risolvere  $|x| + |2 - x| \leq x + 1$ .

**Esercizio 2.13.** Risolvere  $x - 4 > \sqrt{2x(x - 7)}$ .

**Esercizio 2.14.** Utilizzando le relazioni  $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$  per  $xy \neq 0$  e  $x \cdot \operatorname{sgn}(x) = |x|$  per  $x \neq 0$ , risolvere

$$|x| \cdot (24x^{-2} + \operatorname{sgn}(x^3 + x^2 + x)) < 10.$$

**Esercizio 2.15.** Determinare il dominio  $D$  del piano complesso definito da:  $c|z - i| \leq |z + 4 + 7i|$  quando (a)  $c = 1$ , (b)  $c = \sqrt{2}$ .

**Esercizio 2.16.** Mostrare che per  $a, b, c > 0$ , si ottiene:

$$1) a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca;$$

$$2) (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

## Elementi di Teoria

Si può trasformare un'equazione in una equivalente come segue:

- aggiungendo uno stesso termine ai due membri;
- moltiplicando o dividendo i due membri per un numero reale non nullo.

### 2.1 Equazioni algebriche

Si dice che un'equazione è algebrica su  $\mathbb{R}$ , rispettivamente su  $\mathbb{C}$ , se è della forma

$$P(x) = 0,$$

ove  $P$  è un polinomio a coefficienti reali, rispettivamente complessi. Tuttavia, un'equazione algebrica su  $\mathbb{R}$  può avere come soluzione un numero complesso, per esempio  $x^2 + e = 0$ . Si osservi che un'equazione avente per soluzione un numero reale non è necessariamente algebrica su  $\mathbb{R}$ ; per esempio, l'equazione non algebrica  $e \cdot x - e^x = 0$  possiede la soluzione unica  $x = 1$ .

**Proprietà.** Se un numero complesso  $z$  è radice di un polinomio  $P$  a coefficienti reali, allora anche  $\bar{z}$  è radice di  $P$ .

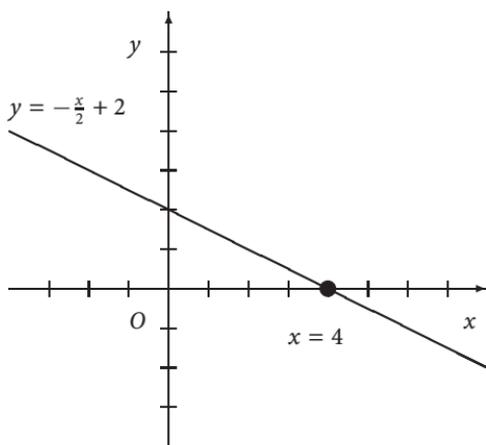
Ogni equazione algebrica su  $\mathbb{C}$  si linearizza, vale a dire se  $P(x)$  è un polinomio di grado  $n$  a coefficienti complessi, allora esistono  $z_1, \dots, z_n$  tali che  $P(x) = (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \dots \cdot (x - z_n)$ .

#### 2.1.1 Equazioni lineari

L'equazione  $ax + b = 0$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) può anche essere scritta  $ax = -b$ . Se  $a \neq 0$ , allora la soluzione dell'equazione è  $x = -\frac{b}{a}$ .

Se  $a = 0$  si ottiene  $0 \cdot x = b$ ; in questo caso, se  $b \neq 0$  l'equazione non ammette soluzione e se  $b = 0$ , ogni numero reale è soluzione dell'equazione.

Per risolvere graficamente  $ax + b = 0$ , è necessario aggiungere una dimensione per poter "rappresentare" l'equazione nel piano. Si tratterà dunque



**Figura 2.1**

la retta  $y = ax + b$  in  $\mathbb{R}^2$  e la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione della retta con l'asse delle  $x$  (come in fig. 2.1).

Se si deve risolvere graficamente

$$ax + b = cx + d,$$

si può procedere in due modi: sia disegnare le rette  $y = ax + b$  e  $y = cx + d$ , sia tracciare la retta  $\tilde{y} = (a - c)x + (b - d)$ . Nel primo caso la soluzione sarà data dall'ascissa dell'intersezione di due rette (vedere sezione 2.3.1), nel secondo caso ci si riconduce alla risoluzione di  $\tilde{a}x + \tilde{b} = 0$ .

### 2.1.2 Equazioni di secondo grado

Consideriamo l'equazione di secondo grado seguente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ reali e } a \neq 0).$$

Dividendo tutti i coefficienti dell'equazione per  $a$  e ponendo  $p = \frac{b}{a}$  e  $q = \frac{c}{a}$ , la si può scrivere sotto la forma *normale*:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si ottiene la soluzione di questa equazione completando il quadrato:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

che produce,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se ci si restringe a soluzioni reali, è necessario che il discriminante sia maggiore o uguale a zero; se questo è negativo, si ottengono come soluzioni dei numeri complessi. La situazione è la seguente:

$b^2 - 4ac > 0$	due radici reali
$b^2 - 4ac = 0$	una radice reale
$b^2 - 4ac < 0$	due radici complesse coniugate

Se l'equazione è sotto forma normale, si ottengono le relazioni seguenti tra le radici e i coefficienti (*formule di Viète*):

**Formule di Viète.**

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{e} \quad x_1 x_2 = q.$$

Queste formule si generalizzano a polinomi di grado superiore. In particolare, se si denotano con  $x_1, x_2$  e  $x_3$  le radici del polinomio  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ , allora le relazioni sono

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r.$$

## 2.2 Equazioni trascendenti

Tutte le equazioni non algebriche sono chiamate *trascendenti*. Tra queste si trovano le equazioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

## 2.2.1 Equazioni esponenziali

### Esempi

1) Risolvere  $4^{2x} = 8$ .

Si riconducono i due membri dell'equazione ad una forma esponenziale avente la stessa base:  $(2^2)^{2x} = 2^3$  o  $2^{4x} = 2^3$ ; ne segue che  $4x = 3$  e  $x = \frac{3}{4}$ .

2) Risolvere  $9 \cdot 3^x \cdot 27^x = 81$ .

Si scrive l'equazione sotto la forma:  $3^2 \cdot 3^x \cdot 3^{3x} = 3^4$  o  $3^{2+4x} = 3^4$  e se ne deduce che  $2 + 4x = 4$  dunque  $x = \frac{1}{2}$ .

3) Risolvere  $7 \cdot 2^x + 2^{x+3} + 2^{x+2} = 76$ .

L'equazione si scrive  $2^x(7 + 8 + 4) = 76$  o  $2^x = 2^2$  da cui si ottiene  $x = 2$ .

## 2.2.2 Equazioni logaritmiche

### Esempi

1) Risolvere  $\log_a(x + 1) + \log_a(3) = \log_a(6)$ .

Affinché  $\log_a(x + 1)$  esista, si deve avere  $x > -1$ ; in questo caso, l'equazione si scrive:  $\log_a(3x + 3) = \log_a(6)$ , da cui  $3x + 3 = 6$  e  $x = 1$ .

2) Risolvere  $\log(x - 2) + \log(x - 5) = 1$ .

Si deve cercare  $x > 5$  affinché i due logaritmi siano definiti. Si scrive l'equazione sotto la forma:  $\log(x^2 - 7x + 10) = 1$  e se ne deduce che  $x$  verifica  $x^2 - 7x + 10 = 10$  le cui soluzioni sono  $x = 0$  e  $x = 7$ . Solo  $x = 7$  soddisfa la condizione  $x > 5$  ed è dunque la soluzione cercata.

3) Risolvere  $3^{x+2} = 2^{3x-5}$ .

Si uguagliano i logaritmi dei due membri dell'equazione e si ottiene:  $\log(3^{x+2}) = \log(2^{3x-5})$  che si scrive  $(x + 2)\log(3) = (2x - 5)\log(2)$ , ciò implica  $x = \frac{2\log(3) + 5\log(2)}{2\log(2) - \log(3)}$ .

## 2.3 Sistemi di equazioni lineari

Un sistema di equazioni si dice *sotto-determinato* se ha più incognite che equazioni e *sovra-determinato* se ci sono più equazioni che incognite. In generale, un sistema d'equazioni sotto-determinato possiede un'infinità di soluzioni e un sistema sovra-determinato non possiede soluzioni. Ci si limiterà ai casi di due equazioni a due incognite, rispettivamente, tre equazioni a tre incognite e presenteremo due metodi di risoluzione che possono essere applicati altrettanto bene ad entrambi i casi.

### 2.3.1 Due equazioni in due incognite

Si consideri il sistema seguente:

$$\begin{cases} x + 3y = 15, \\ 2x - y = 2. \end{cases}$$

Il primo metodo di risoluzione è la *sostituzione*:

La seconda equazione, per esempio, si può scrivere  $y = 2x - 2$ ; sostituendo  $y$  nella prima, si ottiene un'equazione ad una incognita e si trova  $x = 3$ , da cui  $y = 4$ , vedere 2.1.1.

Si può risolvere un tale sistema anche graficamente. Prendiamo per esempio le due equazioni

$$\begin{cases} y + 2 = x + 3 \\ 2y + 3 = -4x + 11 \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

Se si rappresentano le due rette  $y = x + 1$  e  $y = -2x + 4$  nel piano, la loro intersezione  $I(1;2)$  fornisce la soluzione cercata (si veda la fig. 2.2).

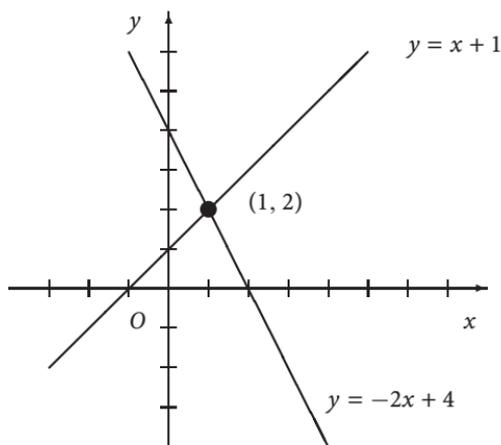


Figura 2.2

### 2.3.2 Tre equazioni in tre incognite

Il secondo metodo di risoluzione consiste nell'eliminazione di un'incognita ad ogni passo, utilizzando *combinazioni lineari*. Sia dato il sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 5, \\ 3x - y + 2z = 2, \\ 2x + y - z = 4. \end{cases}$$

In questo esempio, si può eliminare l'incognita  $y$  se si sommano la prima equazione e la seconda, la seconda e la terza. In questo modo si ottiene:

$$\begin{cases} 4x + 3z = 7, \\ 5x + z = 6. \end{cases}$$

Da questo punto in poi si può procedere con lo stesso principio oppure procedere con una sostituzione, e si ottiene la soluzione  $x = 1, y = 3$  e  $z = 1$ .

È anche possibile risolvere un tale sistema graficamente (per esempio in geometria descrittiva). In questo caso, ogni equazione rappresenta un piano in  $\mathbb{R}^3$ . La soluzione, se esiste, sarà data dall'intersezione dei piani.

## 2.4 Sistemi di equazioni non lineari

Questi sistemi provengono frequentemente da problemi geometrici.

### 2.4.1 Un'equazione lineare e un'equazione quadratica

Un tale sistema è facile da risolvere per sostituzione.

**Esempio.** Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Si scrive  $x = y + 1$ , dalla seconda equazione, e sostituendo  $x$  nella prima, si ottiene l'equazione quadratica  $y^2 - y - 2 = 0$  che ha per soluzioni  $y_1 = -1$  e  $y_2 = 2$ ; l'insieme delle soluzioni del sistema è allora

$$\mathcal{S} = \{(x_1 = 0, y_1 = -1); (x_2 = 3, y_2 = 2)\}.$$

## 2.4.2 Due equazioni quadratiche

Secondo la forma delle equazioni del sistema, si cercherà di combinarle al fine di ottenere il metodo di risoluzione più appropriato.

**Esempio.** Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - x - y - 1 = 0. \end{cases}$$

In questo caso, si moltiplica la seconda equazione per 2 poi la si sottrae alla prima e si ottiene  $-2x - 2y + 8 = 0$ , riconducendosi dunque ad un sistema della forma precedente. Si può dunque scrivere  $x = 4 - y$  e la si sostituisce nella prima equazione che diventa  $y^2 - 4y + 3 = 0$  le cui soluzioni sono  $y_1 = 1$  e  $y_2 = 3$ . L'insieme delle soluzioni del sistema è dunque  $S = \{(x_1 = 3, y_1 = 1); (x_2 = 1, y_2 = 3)\}$ .

Nel caso seguente, si risolve una delle equazioni considerando  $y$  come parametro; poi sostituendo il risultato nell'altro, si ottiene un'equazione quadratica in  $x$  le cui soluzioni permettono di trovare quelle del sistema.

**Esempio.** Risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 9, \\ x^2 - 6xy + 5y^2 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si scrive  $(x - y)(x - 5y)$ , da cui  $x = y$  o  $x = 5y$ . Sostituendo, nella prima equazione,  $x = y$ , si ottiene  $y = \pm\frac{3}{2}$ ; poi, con  $x = 5y$ , si ottiene  $y = \pm\frac{3}{8}$ . L'insieme delle soluzioni è dunque

$$S = \left\{ \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right); \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right); \left( \frac{15}{8}, \frac{3}{8} \right); \left( -\frac{15}{8}, -\frac{3}{8} \right) \right\}.$$

## 2.5 Disuguaglianze

### 2.5.1 Disuguaglianze lineari

Sia data la disuguaglianza

$$ax + b > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

La soluzione dipende essenzialmente dal valore di  $a$ .

Se  $a = 0$ , si ottiene la disuguaglianza  $b > 0$ . Se  $b$  è realmente maggiore di 0, la disuguaglianza è verificata per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . In caso contrario, non vi è soluzione.

Se  $a \neq 0$ ,  $ax > -b$  implica:

$$x > \frac{-b}{a} \text{ se } a > 0, \quad \text{ovvero } x \in ] -b/a; +\infty[;$$

$$x < \frac{-b}{a} \text{ se } a < 0, \quad \text{ovvero } x \in ] -\infty; -b/a[.$$

### 2.5.2 Disuguaglianze quadratiche

Si consideri il seguente polinomio di grado due:  $P(x) = ax^2 + bx + c$  dove  $a, b, c$  sono reali e  $a \neq 0$ . Esso si scrive:

$$P(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

È facile dedurne che il segno di  $P(x)$  dipende da quello di  $b^2 - 4ac$  come segue:

- 1) se  $b^2 - 4ac > 0$  allora l'equazione  $P(x) = 0$  ha due radici distinte  $x_1 < x_2$ . Il segno di  $P(x)$  è quello di  $a$  per  $x \in ] -\infty, x_1[ \cup ] x_2, +\infty[$ , quello di  $-a$  per  $x \in ] x_1, x_2[$ ;
- 2) se  $b^2 - 4ac = 0$  allora il segno di  $P(x)$  è quello di  $a$  per  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  dove  $x_0$  è la radice doppia di  $P(x) = 0$ ;
- 3) se  $b^2 - 4ac < 0$  allora il segno di  $P(x)$  è quello di  $a$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

Se ne evince che il segno di  $P(x)$  è quello del coefficiente di  $x^2$ , fatto salvo il caso in cui  $x$  sia tra le radici di  $P$ , se ce ne sono.

**Esempio.** Risolvere la disuguaglianza  $3x^2 - 8x + 7 > 2x^2 - 3x + 1$ .

La si scrive sotto la forma:  $x^2 - 5x + 6 > 0$  e si cercano le radici dell'equazione  $x^2 - 5x + 6 = 0$  che sono  $x_1 = 2$  e  $x_2 = 3$ . La disuguaglianza data è soddisfatta quando  $x < 2$  o  $x > 3$ .

### 2.5.3 Disuguaglianze a due variabili

Sia  $P(x, y)$  un polinomio. Su ogni regione del piano delimitato dalla curva  $P(x, y) = 0$ , la funzione  $P(x, y)$  mantiene un segno costante. Per determinarlo, è sufficiente valutare  $P$  in un punto specifico della regione.

## 62 . . . . 2. Risoluzione di equazioni . . . . .

**Osservazione.** Questa proprietà è valida quando  $P(x)$  è un polinomio in una variabile, ed è generalizzabile anche in  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio.** Determinare il dominio del piano dove  $P(x, y) = 2y + x - 4 > 0$ .

La curva  $P(x, y) = 0$  è una retta passante per i punti  $(4, 0)$  e  $(0, 2)$ . Su ogni semipiano delimitato da questa retta, il segno di  $P$  non cambia. Poiché  $P(0, 0) = -4 < 0$  e  $P(5, 0) = 1 > 0$ , la risposta è il semipiano delimitato dalla retta  $P(x, y) = 0$  e contenente il punto  $(5, 0)$ .

### 2.5.4 Disuguaglianze notevoli

**Disuguaglianza triangolare.**  $\forall x, y, \in \mathbb{R}$ :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

**Disuguaglianza delle medie.**

Siano  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > 0, x_2 > 0$ . Allora,

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}}_{\text{media armonica}} \leq \underbrace{\sqrt{x_1 x_2}}_{\text{media geometrica}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + x_2}{2}}_{\text{media aritmetica}}.$$

Si ha uguaglianza solo se  $x_1 = x_2$ .

Questa doppia disuguaglianza può essere generalizzata a  $n$  variabili  $x_1, \dots, x_n$ .

**Dimostrazione** (caso  $n = 2$ ).

Si ha  $\frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1 x_2}$  (1),  $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$  (2).

La disuguaglianza (2) è equivalente a  $4x_1 x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$  che è, a sua volta, equivalente a  $0 \leq (x_1 - x_2)^2$ , vera  $\forall x_1, x_2$ .

La disuguaglianza (1) è equivalente a  $\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2}$  che è, a sua volta, equivalente a (2), dunque vera.

**Disuguaglianza di Bernoulli.**

Per ogni intero naturale  $n > 1$  e ogni numero reale  $x > -1$ , si ha:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

L'uguaglianza si verifica solo se  $x = 0$ .

**Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.**

Siano  $(x_1, \dots, x_n)$  e  $(y_1, \dots, y_n)$  dei numeri reali. Allora:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

**Dimostrazione.**

Consideriamo il seguente polinomio di grado due in  $\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^n (|x_i| + \lambda |y_i|)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n |x_i y_i| + \lambda^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2.$$

Essendo questo polinomio positivo (o nullo)  $\forall \lambda$ , il suo discriminante sarà negativo (o uguale a zero); vale a dire, si avrà:

$$\begin{aligned} \left( 2 \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right)^2 - 4 \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^n |y_i|^2 &\leq 0 \\ \implies \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2} &\geq \left| \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \right| = \sum_{i=1}^n |x_i y_i|. \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ottiene solo se le  $|x_i|$  sono proporzionali alle  $|y_i|$ .

## Soluzioni

**Soluzione 2.1.** Si deve avere  $x^3 - 9x = 0$ , da cui  $S = \{-3, 0, 3\}$ .

**Soluzione 2.2.** Per  $x > 0$  e  $x \neq 1$ , ci si riconduce, dopo trasformazione dell'equazione, a  $x^2 + x - 1 = 0$ ; si ottiene dunque  $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ .

**Soluzione 2.3.** Distinguendo i casi  $x < 0$  e  $x \geq 0$ , si ottengono due equazioni di secondo grado:  $x^2 + 6x - 7 = 0$  per  $x < 0$  e  $x^2 - 6x + 7 = 0$  per  $x \geq 0$ . Le radici ammissibili di tali equazioni sono  $x_1 = -7, x_2 = 3 - \sqrt{2}, x_3 = 3 + \sqrt{2}$ .

**Soluzione 2.4.** Dalla disequazione  $x + 2|x| < 1$  si deduce

$$\begin{cases} -x < 1 & \text{per } x < 0 \\ 3x < 1 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

ovvero  $-1 < x < \frac{1}{3}$ .

La seconda disequazione implica  $-2 \leq x \leq \frac{1}{4}$ , da cui la soluzione  $-1 < x \leq \frac{1}{4}$ .

**Soluzione 2.5.** L'altezza della colonna d'acqua è 224 m.

**Soluzione 2.6.** L'auto passa davanti alla persona dopo 7 secondi.

L'accelerazione cercata è di  $1 \text{ m/s}^2$ . Si osserva che quando l'accelerazione è divisa per quattro, il tempo raddoppia e non quadruplica!

**Soluzione 2.7.** Moltiplicando l'equazione per  $e^{\frac{3}{2}x}$ , si ottiene  $2e^{3x} - e^{2x} - 5e^x - 2 = 0$ , vale a dire con  $u = e^x$ :  $2u^3 - u^2 - 5u - 2 = 0$ , da cui  $u = -1$  o  $-\frac{1}{2}$  o  $2$ . La sola soluzione ammissibile è  $x = \ln 2$ .

**Soluzione 2.8.**

a) L'equazione data implica che  $e^{2y} - e^{2x} = 2e^y$ ; in questo modo,  $e^y$  verifica l'equazione  $t^2 - 2t - e^{2x} = 0$ . Considerando solo la soluzione positiva, si ottiene allora  $y = \ln(1 + \sqrt{1 + e^{2x}})$ .

b) La condizione di esistenza è  $x > 15$  e la disuguaglianza si può scrivere sotto la forma  $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 13 - \frac{15}{x}) < \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}2(x - 15))$ , che è equivalente a

$$\ln(2x - 13 - \frac{15}{x}) > \ln(x - 15)$$

poiché  $\log_{\frac{1}{2}} a = \frac{\ln a}{\ln \frac{1}{2}}$  e  $\ln \frac{1}{2} < 0$ . Se ne deduce  $2x - 13 - \frac{15}{x} > x - 15$  che implica  $x^2 + 2x - 15 > 0$ , da cui  $x \in (]-\infty, -5[ \cup ]3, +\infty[) \cap ]15, +\infty[$  ovvero  $x \in ]15, +\infty[$ .

**Soluzione 2.9.** Si può interpretare il problema come intersezione di due rette: vi è un'infinita di soluzioni se le due rette coincidono. In particolare, i coefficienti di  $x$  e di  $y$  delle equazioni date devono essere necessariamente proporzionali, ovvero,

$$\frac{p+6}{p} = \frac{p}{1} \quad \text{o} \quad p^2 - p - 6 = 0 \quad \text{dunque} \quad p = -2 \quad \text{o} \quad p = 3.$$

Per  $p = -2$ , (S) diventa  $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$  : questo sistema non ammette soluzione.

Per  $p = 3$ , (S) diventa  $\begin{cases} 9x + 3y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ , di soluzione  $(x, y)$  tale che  $y = 1 - 3x$ ,  $x$  arbitrario.

**Soluzione 2.10.** Per sostituzione, si ottengono due soluzioni; dunque due intersezioni:  $(x, y) = (1, -3)$  o  $(43, -17)$

**Soluzione 2.11.** Secondo il dato, è chiaro che i punti cercati sono nel piano di equazione  $z = 4$ . La loro terza coordinata è dunque 4.

Per trovare l'equazione del piano passante per  $A, B$  e  $C$ , si può cercare il suo vettore normale effettuando per esempio  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ .

Con l'equazione del cerchio e l'equazione del piano, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{cases}$$

di soluzioni:  $(2 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 4)$  e  $(2 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, 4)$ .

**Soluzione 2.12.** Si studia la disuguaglianza seguendo i segni di  $x$  e di  $2 - x$  e se ne deduce la soluzione:  $x \in [1, 3]$ .

**Soluzione 2.13.** Prima di tutto si fissano le condizioni di esistenza, poi ci si riconduce ad una equazione quadratica e si ottiene la soluzione:  $x \in [7, 8[$ .

**Soluzione 2.14.** Si ha:

$$\begin{aligned} 10 &> 24 \frac{|x|}{x^2} + |x| \operatorname{sgn}(x(x^2 + x + 1)) \\ &= 24 \frac{|x|}{|x|^2} + |x| \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(x^2 + x + 1) = \frac{24}{|x|} + x \cdot 1, \end{aligned}$$

da cui  $x|x| - 10|x| + 24 < 0$ , ovvero anche

$$x^2 - 10x - 24 > 0, \quad x < 0$$

$$x^2 - 10x + 24 < 0, \quad x > 0$$

da cui  $x \in ] - \infty, -2[ \cup ]4, 6[$ .

**Soluzione 2.15.**

a) Si deve avere  $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} \leq \sqrt{(x + 4)^2 + (y + 7)^2}$ , ovvero, dopo elevazione al quadrato:  $y \geq -\frac{1}{2}(x + 8)$ . Il dominio  $D$  è dunque il semipiano superiore limitato dalla retta d'equazione  $x + 2y + 8 = 0$ .

b) La disuguaglianza si riconduce a:  $(x - 4)^2 + (y - 9)^2 \leq 160$ . In questo caso,  $D$  è l'interno del disco centrato in  $(4, 9)$  e di raggio  $4\sqrt{10}$ , frontiera inclusa.

**Soluzione 2.16.** Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si può scrivere

$$1) a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a \leq (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}(b^2 + c^2 + a^2)^{1/2};$$

$$2) 3 = \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq (a + b + c)^{1/2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^{1/2}.$$